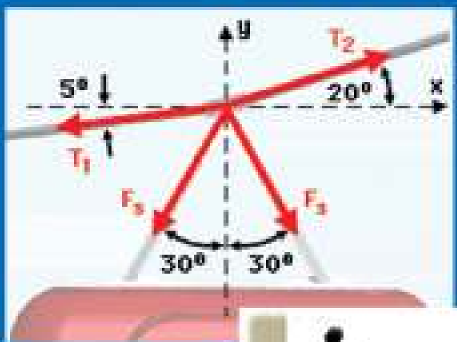
க.பொ.த. (உயர்தரம்)

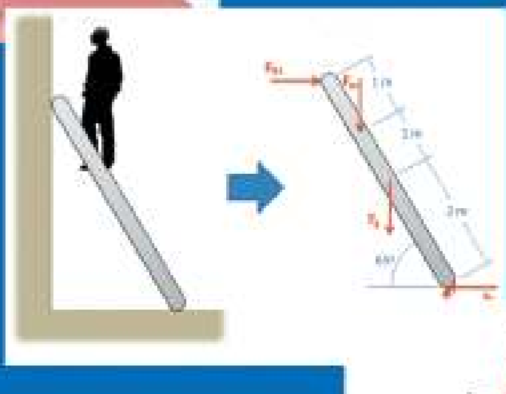
இணைந்த கணிதம்

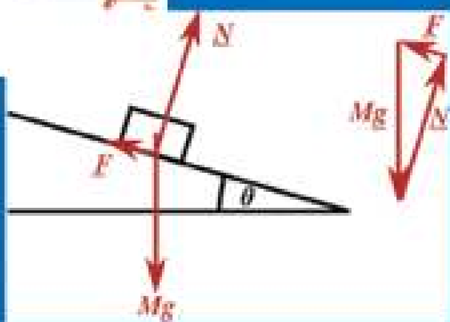
நிலையியல் - I

மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூல்

(2017 ஆம் ஆண்டிலிருந்து நடைமுறைப்படுத்தப்படும் புதிய பாடத்திட்டத்திற்கு அமைவாகத் தயாரிக்கப்பட்டது)







வெளியீடு
கணிதத்துறை
விஞ்ஞான தொழிநுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
இலங்கை
www.nie.lk

க.பொ.த. (உயர்தரம்)
இணைந்த கணிதம்

நிலையியல்

பகுதி I

மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூல்

வெளியீடு
கணிதத்துறை
விஞ்ஞான தொழிநுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
மகரகம

இணைந்த கணிதம்
நிலையியல் - பகுதி I
மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூல்
முதற்பதிப்பு - 2018

வெளியீடு:
கணிதத்துறை
விஞ்ஞான தொழினுட்ப பீடம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்
மகரகம, இலங்கை

இணையத்தளம் : *www.nie.lk*

பதிப்பு: அச்சகம்,
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

பணிப்பாளர் நாயகத்தின் செய்தி

கணிதக் கல்வியை விருத்தி செய்வதற்காக தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் கணிதத் துறையினால் காலத்துக்கேற்ப பல்வேறு செயற்பாடுகள் முன்னெடுக்கப்படுகின்றது. ''**நிலையியல் - பகுதி I**'' எனும் பெயரில் எழுதப்பட்ட இந்த நூல் இதன் ஓர் வெளிப்பாடாகும்.

தரங்கள் 12, 13க்குரிய பாடத்திட்டத்தினை கற்ற பின் நடைபெறும் கல்வி பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) பரீட்சைக்கு மாணவர்களைத் தயார்ப்படுத்துவது ஆசிரியரின் பிரதான காரியமாகும். இதற்குப் பொருத்தமான மதிப்பீட்டுக் கருவிகள் மிகக் குறைவாகவே உள்ளது. வியாபார நிலையங்களில் உள்ள அநேகமான கருவிகள் பொருத்தப்பாட்டிலும் தரத்திலும் குறைவான வினாக்களைக் கொண்டிருப்பது இரகசியமல்ல. இந்த நிலைமையை மாற்றி மாணவர்கள் பரீட்சைக்கு நன்றாகத் தயாராகும் வகையில் தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் கணிதத் துறையினால் இந்தப் ''**நிலையியல் - பகுதி I**'' என்ற நூல் உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த நூல் பாடத்திட்டத்துக்கேற்ப உருவாக்கப்பட்ட பெறுமதிமிக்க வாசிப்புத் துணைநூல் ஆகும். செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள் உள்ளடக்கப்பட்டிருப்பது ஆசிரியர்களுக்கும் மாணவர்களுக்கும் மிகவும் பயனுள்ளதாக அமையும்.

இந்த நூலை பயன்படுத்துவதன் மூலம் கணித பாடத்தின் கற்றல் - கற்பித்தல் செயற்பாட்டினைத் திறம்படச் செய்யுமாறு ஆசிரியர்களிடமும் மாணவர்களிடமும் கேட்டுக் கொள்கின்றேன். ''**நிலையியல் - பகுதி I**'' என்ற நூலை உங்கள் கைசேர வைப்பதற்கு அனுசரணை வழங்கிய Aus Aid செயற்றிட்டத்துக்கும் இதனைத் திறம்படச் செய்வதற்கு வளவாளர்களாகப் பணிபுரிந்த கணிதத் துறையின் செயற்குழுவினருக்கும் வெளிவாரி வளவாளர்களுக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன்.

கலாநிதி (திருமதி) ரி. ஏ. ஆர். ஜே. குணசேகர
பணிப்பாளர் நாயகம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

பணிப்பாளரின் செய்தி

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) பாடப் பரப்புக்களில் கணிதப் பாடப்பரப்புக்கு விசேட இடம் உரித்தாகும். கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (சாதாரண தர) பரீட்சையில் உயர் மட்டத்தில் சித்தியடையும் மாணவர்கள் விசேடமாக கணித பாடப் பரப்பை விரும்புகின்றனர். நாட்டுக்கும் உலகிற்கும் ஏற்ற புதிய உற்பத்திகள் உருவாகுவதற்கு காரணமாக இருந்த நிபுணர்களை உருவாக்கியது கணித பாடப் பரப்பில் கற்ற மாணவர்கள் என்பதை கடந்த காலம் சாட்சி பகர்கின்றது.

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) கணித பாடங்களுக்கு பாடத்திட்டத்தை தயாரித்திருப்பது விஞ்ஞான உலகிற்கு, தொழினுட்ப உலகிற்கு மற்றும் வேலை உலகிற்கு தேவையான வித்துனர்களை உருவாக்கும் நோக்கத்தில் ஆகும்.

2017 ஆம் ஆண்டிலிருந்து உயர்தர இணைந்த கணிதம் மற்றும் உயர் கணித பாடங்களுக்கு மீளமைக்கப்பட்ட புதிய பாடத்திட்டம் நடைமுறைப்படுத்தப்படுகின்றது. இந்த பாடங்களைக் கற்கும் மாணவ மாணவியரின் கற்றலை இலகுவாக்குவதற்கு ‘‘**நிலையியல்- பகுதி I, பகுதி II**’’ எனும் மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூல்கள் தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் கணிதத் துறையினால் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த நூலில் உள்ள பயிற்சிகள் மாணவர்களின் எண்ணக்கரு அடைவு மட்டத்தை அளந்து பார்க்கவும் எதிர்காலத்தில் நடைபெறும் கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) பரீட்சைக்கு ஆயத்தமாவதற்கு பொருத்தமானதாகவும் அமைந்துள்ளது. வினாவுக்குரிய விடையை பெற்றுக் கொடுப்பதன் மூலம் மாணவ மாணவிகள் வினா ஒன்றுக்கு விடையளிக்கும்போது பின்பற்ற வேண்டிய படிமுறைகள் மற்றும் முறைமை தொடர்பான அனுபவத்தைப் பெற்றுக் கொடுப்பது எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது. அதன் மூலம் விடையை ஒழுங்குபடுத்த வேண்டிய முறை தொடர்பாக மாணவர்கள் தங்கள் ஆற்றல், திறன் மற்றும் அறிவை விருத்தி செய்வதற்கு முடிகின்றது. இந்த வாசிப்புத் துணைநூல்களைத் தயாரிப்பதற்கு நிபுணத்துவம் கொண்ட ஆசிரியர்கள் மற்றும் பாடத்திட்ட நிபுணர்களின் வளப் பங்களிப்பு பெறப்பட்டுள்ளது.

மேலும் இந்த வினாக்களைத் தயாரிக்கும்போது ஒவ்வொரு பாட உள்ளடக்கத்திலும் பல்வேறு கோணங்களில் மாணவ மாணவிகளின் அவதானத்தைச் செலுத்தவும். மாணவர்களின் அறிவை விரிவுபடுத்திக் கொள்ளும் சந்தர்ப்பத்தைப் பெற்றுக் கொடுக்க, வழிகாட்ட கவனம் செலுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆசிரியர்களின் அறிவுறுத்தல்கள் மற்றும் வழிகாட்டலின் கீழ் சுயமாகக் கற்பதற்கு உகந்ததாக இந்த நூல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறான பெறுமதிமிக்க நூலை உருவாக்குவதற்கு ஆலோசனையும் வழிகாட்லையும் வழங்கிய தேசிய கல்வி நிறுவகத்தின் பணிப்பாளர் நாயகத்துக்கும் வளவாளர்களாகச் செயற்பட்ட அனைவருக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவித்துக் கொள்கின்றேன். இந்த நூலைப் பயன்படுத்தி அதன் மூலம் பெற்றுக் கொள்ளும் அனுபவத்தின் மூலம் மீள்பதிப்புக்கு பயன்படுத்தக்கூடிய பெறுமதியான நேர்கருத்துக்களை எங்களுக்குப் பெற்றுத் தருமாறு கேட்டுக் கொள்கின்றேன்.

கே. ரஞ்சித் பத்மசிரி
பணிப்பாளர்
கணிதத்துறை
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

கலைத் திட்டக் குழு

ஆலோசனையும் வழிக்காட்டலும் :	**கலாநிதி (திருமதி) ரி. ஏ. ஆர். ஜே. குணசேகர** பணிப்பாளர் நாயகம் தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
மேற்பார்வை :	**திரு. கே.ஆர். பத்மசிரி** பணிப்பாளர் கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திட்டமிடலும் **இணைப்பாக்கமும் :**	**திரு. எஸ். இராஜேந்திரம்** சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர், க.பொ.த உயர்தர பாடத்திட்ட குழுத்தலைவர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

உள்வாரி வளவாளர்கள் :

திரு. ஜி. பி. எச். ஜகத்குமார	சிரேட்ட விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திருமதி. எம். நில்மினி பி. பீரிஸ்	சிரேட்ட விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திரு. எஸ். இராஜேந்திரம்	சிரேட்ட விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திரு. க. சுதேசன்	உதவி விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திரு. பி. விஜய்குமார்	உதவி விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
செல்வி.கே.கே. வஜிமா எஸ். கங்கானங்கே	உதவி விரிவுரையாளர், கணிதத் துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

வெளிவாரி வளவாளர்கள் :

திரு. க. கணேசலிங்கம்	-	ஓய்வுபெற்ற பிரதம செயற்திட்ட அதிகாரி, கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.
திரு. த. சிதம்பரநாதன்	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரியர்
திரு. க. பாலதாசன்	-	ஓய்வு பெற்ற கணித பாட உதவிக் கல்விப் பணிப்பாளர்.
திரு. வி. ராஜரட்ணம்	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரியர்
திரு. எஸ். ஜீ. தொலுவீர	-	ஆசிரியர், உவெஸ்லிக் கல்லூரி, கொழும்பு - 08.
திரு. சலங்க பெர்னான்டோ	-	ஆசிரியர், விவேகானந்தா கல்லூரி, கொழும்பு - 13
திரு. என். சகபந்து	-	ஓய்வு பெற்ற ஆசிரியர்
திரு. கே. இரவீந்திரன்	-	ஓய்வு பெற்ற பிரதி அதிபர்
திரு. ஜி. எச். அசோகா	-	ஆசிரியர், இராகுல கல்லூரி, மாத்தறை.

மொழிச் செம்மையாக்கம் : **திரு. வி. முத்துக்குமாரசுவாமி**
ஓய்வுபெற்ற அதிபர்.

வெளியீடும் மேற்பார்வையும் : **திரு. டபிள்யு. எம். டபிள்யு. விஜேசூரிய**
பணிப்பாளர்
வெளியீட்டுத் துறை.

கணினிப் பதிப்பும் வடிவமைப்பும் : **செல்வி. கமலவேணி கந்தையா**
அச்சகம், தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

அட்டைப்பட வடிவமைப்பு : **திருமதி. கே. டி. அனுஷா தரங்கனி**
அச்சகம், தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

உதவியாளர்கள் : **திரு. எஸ். கெட்டியாராய்ச்சி**
கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

திருமதி. கே. என். சேனானி
கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

திரு. ஆர். எம். ரூபசிங்ஹ
கணிதத்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

அறிமுகம்

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர) வகுப்புக்களில் இணைந்த கணிதப் பாடத்தைக் கற்கும் மாணவர்கள் பயிற்சி பெறும் முகமாக இந்நூல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்களுக்கு போதிய பயிற்சிகளை வழங்குமுகமாகவும், பாடப்பரப்பினை சுயமாகக் கற்று பரீட்சைக்குத் தயாராகுவதற்கான ஓர் மேலதிக வாசிப்புத் துணைநூலாக இந்நூல் தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. இது ஓர் மாதிரி வினாத்தாள் தொகுதி அன்று என்பதையும் சுயகற்றலுக்கான அல்லது தவறவிட்டவற்றை மீளக் கற்பதற்கான ஓர் துணைநூல் என்பதையும் மாணவர்களும் ஆசிரியர்களும் விளங்கிக் கொள்ள வேண்டும்.

இவ் வாசிப்புத் துணைநூலில் தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களில் காணப்படும் வினாக்களைச் செய்த பின்னர் அவற்றிற்கு வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளை தமது விடைகளுடன் மாணவர்கள் ஒப்பிட்டு நோக்க முடியும் என்பதும் இங்கு தரப்பட்டவாறே அத்தனை படிமுறைகளையும் உள்ளடக்கியவாறு மாணவர்களது விடைகள் இருக்க வேண்டும் என்பதும் அவசியமன்று. உங்களது விடைகளைச் சரிபார்ப்பதற்கும் படிமுறைகளை சரியாகப் பின்பற்றுவதற்காகவுமான வழிகாட்டல்களாகவே இங்கு விடைகள் தரப்பட்டுள்ளன என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும்.

இந் ‘‘**நிலையியல் - பகுதி I**’’ நூலானது 2017 முதல் நடைமுறைக்கு வந்துள்ள மீள்நோக்கித் திருத்தப்பட்டுள்ள பாடத்திட்டத்திற்கு அமைவாக 2019 ஆம் ஆண்டு முதன் முதலாக க.பொ.த (உயர்தரம்) பரீட்சைக்குத் தோற்றும் மாணவர்களை இலக்காகக் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆயினும் உயர் கணிதத்தைக் கற்கும் மாணவர்களும் தமக்குரிய பாடப்பரப்புகளுக்குரியவாறான வினாக்களைப் பயன்படுத்த முடியும்.

தேசிய கல்வி நிறுவக கணிதத் துறையினரால் வெளியிடப்பட்ட க.பொ.த (உயர்தரம்) இற்கான முதலாவது ‘‘**பயிற்சி வினாக்கள் விடைகளுடன்**’’,என்ற நூலைத் தொடர்ந்து ‘‘**நிலையியல் I**’’ எனும் புத்தகம் வெளியிடப்படுகின்றது. இதன் தொடர்ச்சியாக நிலையியல் II, இணைந்த கணிதம் I, இணைந்த கணிதம் II அலகு ரீதியான பயிற்சி வினாத்தொகுதியும் விரைவில் வெளியிடப்படும். இப்புத்தகங்களிலுள்ள குறைகளையும் நலிவுகளையும் சுட்டிக் காட்டுவீர்களாயின் அது எமது வெளியீடுகளைத் திருத்தியமைக்க உதவும் என்பதுடன் உங்களது கருத்துக்களை மிகவும் பெறுமதி வாய்ந்தவையாக மதிக்கின்றோம் என்பதையும் உங்களுக்கு அறியத்தருகின்றோம்.

திரு. எஸ். இராஜேந்திரம்
செயற்றிட்ட குழுத் தலைவர்
தரம் 12, 13 கணிதம்
தேசிய கல்வி நிறுவகம்.

உள்ளடக்கம்

1.0 காவிகள்

1.1 எண்ணிக் கணியங்கள்

எண்களாலும் பொருத்தமான அலகுகளாலும் முழுமையாகத் தீர்மனிக்கப்படத்தக்க கணியங்கள் எண்ணிக் கணியங்கள் எனப்படும்.

தூரம், நேரம், திணிவு, கனவளவு, வெப்பநிலை என்பன எண்ணிக் கணியங்களாகும். மேலும் ஒரேவகை இரு எண்ணிக் கணியங்களைக் கூட்டும் போது, அதே வகையான இன்னொரு எண்ணிக் கணியம் பெறப்படும்.

உதாரணங்கள்:

திணிவு 10Kg, வெப்பநிலை 27^0C, நேரம் 20s, நீளம் 2m, பரப்பளவு 5m^2, கனவளவு 4m^3, கொள்ளளவு $2l$, கதி $5ms^{-1}$.

மேலே தரப்பட்ட உதாரணங்களில் அலகுகளைத் தவிர்த்து பெறபப்டும் எண்கள் எண்ணிகள் எனப்படும்.

பருமனால் (அலகுகளுடன்) மட்டும் முற்றாகக் குறிப்பிட முடியாத கணியங்களும் உள்ளன. இக்கணியங்கள் பருமானலும் (அலகுகளுடன்) திசையினாலும் முற்றாகக் குறிப்பிடலாம். உதாரணமாக,

(i) வடக்கு நோக்கி 15kmh^{-1} உடன் இயங்கும் கப்பல்.
(ii) துணிக்கை ஒன்றின் மீது நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கித் தாக்கும் 20N விசை.

காவிகள் பற்றிய கற்கை 19 ஆம் நூற்றாண்டின் நடுப்பகுதியில் முதலில் ஆரம்பிக் கப்பட்டது. அண்மைக் காலங்களில் ‘‘காவிகள்’’ புறந்தள்ள முடியாத ஒரு கருவியாகக் காணப்படுகின்றது.

பொறியியலாளர், கணிதவியாளர், பௌதீகவியலாளர்களினால் கணிதக் கணித்தல் களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அதேவேளை பௌதீக, கணிதப் பிரசினங்கள், காவி யைப் பயன்படுத்திச் சுருக்கமாக உணர்த்தப்படக் கூடியதாக உள்ளது.

1.2 காவிக் கணியங்கள்

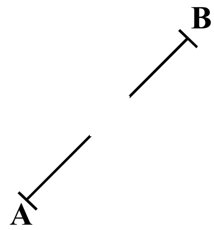
பருமன்களாலும் (அலகுகளும்) திசைகளாலும் முற்றாகக் குறிக்கப்படக் கூடிய கணியங்கள் காவிக் கணியங்கள் எனப்படும்.

உதாரணங்கள்:

(i) வடக்கு நோக்கி 5m இடப்பெயர்ச்சி
(ii) தென் கிழக்கு நோக்கி 15ms^{-1} வேகம்.
(iii) நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி 30N நிறை
(iv) கிடையுடன் 30^0 சரிவில் மேனோக்கி 10N விசை

1.3 காவிகளை வகை குறித்தல்

இரு வழிகளில் காவியை வகை குறிக்கலாம்.

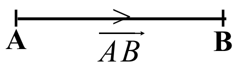


கேத்திரகணித வகை குறிப்பு

காவி திசை கொண்ட கோட்டுத்துண்டம் $\overrightarrow{AB}$ யினால் வகைகுறிக்கலாம். கோட்டுத்துண்டம் AB யின் நீளம் காவியின் பருமனையும், அதன் மேலுள்ள அம்புக்குறி திசையையும் குறிக்கும். இது காவியொன்றின் கேத்திர கணித வகைகுறிப்பு ஆகும்.

உதாரணம்:

கிழக்கு நோக்கிய திசையில் $4\mathrm{N}$ விசையைக் குறிப்பதற்குக் கிழக்கு நோக்கிக் கோட்டுத்துண்டம் AB, AB=4 அலகுகள் ஆகுமாறு வரையப்படுகிறது. திசையைக் குறிப்பதற்கு, A யிலிருந்து B யை நோக்கி அம்புக்குறி இடப்படுகிறது.



$AB = 4$ அலகு

அட்சரகணித வகை குறிப்பு

காவி $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, தனியான அட்சரகணிதக் குறியீட்டால் $\underline{a}$ எனக் குறிக்கப்படும். சில கணிதப் புத்தகங்களில் $\boldsymbol{a}$ எனத் தடித்த எழுத்தால் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கும்.

1.4 காவி ஒன்றின் மட்டு

காவி ஒன்றின் பருமன் மட்டு எனப்படும்.

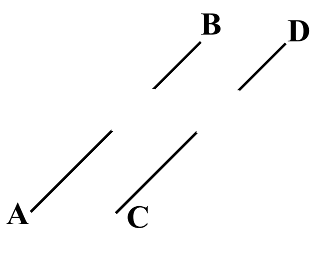
காவி $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $(\underline{\mathrm{a}})$ யின் பருமன் $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ அல்லது $(|\underline{a}|)$ என எழுதப்படும்.

காவி ஒன்றின் பருமன் மறையற்றது.

1.5 இரு காவிகளின் சமம்

இரு காவிகளின் பருமன்கள் சமமாகவும், ஒரே திசையிலுமிருப்பின் அக்காவிகள் சமகாவிகள் எனப்படும்.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(=\underline{a}),\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}\,(=b)$ எனுமிரு காவிகளைக்கருதுக.



(i) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|$

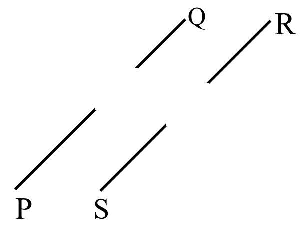
(ii) $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$

(iii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ என்பன ஒரே திசையையுடையன.

எனின், எனின் மட்டும் $(\Leftrightarrow)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ எனப்படும்.

குறிப்பு: காவிகள் $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}$ ஐக் கருதுக.



$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{RS}\right|$$

$$PQ \parallel RS$$

ஆனால் திசைகள் எதிரானவை

எனவே $\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{RS}$

1.6 அலகுக்காவி

பருமன் 1 அலகு ஆகவுள்ள காவி அலகுக்காவி எனப்படும். காவி $\underline{a}$ தரப்படின், $\underline{a}$ யின் திசையிலான அலகுக்காவி $\dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ ஆகும். இது $\hat{a}$ எனக் குறிக்கப்படும்.

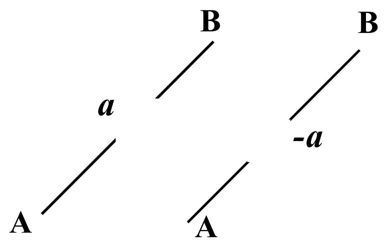
1.7 பூச்சியக்காவி (சூனியக்காவி)

பருமன் பூச்சியமாகவுள்ள காவி பூச்சியக் காவி எனப்படும். இது $\underline{O}$ எனக் குறிக்கப்படும். $|\underline{O}| = O$ உம் பூச்சியக்காவியின் திசை எதேச்சையானது. பூச்சியக் காவி புள்ளியொன்றினால் குறிக்கப்படும்.

1.8. தரப்பட்ட காவியொன்றின் மறைக் காவி

காவி $\overrightarrow{AB}$ தரப்பட்டிருக்க, காவி $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB}$ யின் மறைக் காவி எனப்படும். $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ஆகும்.

குறிப்பு : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$; $|\underline{a}| = |-\underline{a}|$

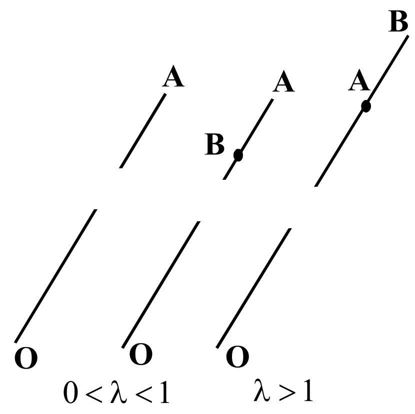


1.9 காவியை எண்ணி ஒன்றால் பெருக்குதல்

$\overline{a}$ ஒரு காவியாகவும், λ ஓர் எண்ணியாகவுமிருக்க $\lambda\,\underline{a}$ என்பது காவி $\underline{a}$ யினதும் எண்ணி λ வினதும் பெருக்கம் எனப்படும்.

வகை

(i) $\lambda > 0$ என்க. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ என்க.
கோடு OA இல் (அல்லது நீட்டப்பட்ட OA இல்)
$OB = \lambda\, OA$ ஆகுமாறு OA இல் புள்ளி B யை எடுக்க.
$\overrightarrow{OB} = \lambda\,\overrightarrow{OA} = \lambda\,\underline{a}$ ஆகும்.



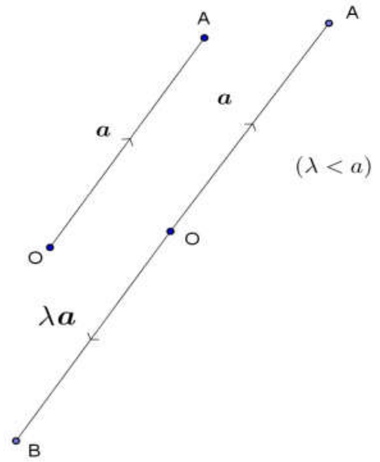
(ii) $\lambda = O$ எனின், $\lambda \underline{a} = \underline{O}$ ஆகும். $\lambda \underline{a}$ பூச்சியக் காவி என வரையறுக்கப்படும்.

$\lambda \underline{a} = o\ \underline{a} = \underline{o}$ ஆகும்.

(iii) $\lambda < o$ என்க

காவி $\lambda \underline{a}$, $\underline{a}$ யின் திசைக்கு எதிரானதாகவும், $|\lambda| OA$ பருமனையுடையதாகவும் காணப்படும். நீட்டப்பட்ட AO இல் $OB = |\lambda| OA$ ஆகுமாறு புள்ளி B யை எடுக்க.

$\overrightarrow{OB} = \lambda\ \underline{a}$ ஆகும்.



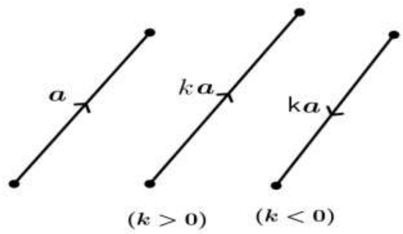
1.10 சமாந்தரக் காவிகள்

காவி $\underline{a}$ மெய்யெண் $k\ (\neq 0)$ தரப்பட்டிருக்க,

$k\ \underline{a}$ எனும் காவி, $\underline{a}$ யிற்கு சமாந்தரமானது ஆகும்.

(i) $k > o$ எனின், காவி யின் திசையைக் கொண்டிருக்கும்.

(ii) எனின், காவி யின் திசைக்கு எதிரான தாகும்.



$\underline{a}, \underline{b}$ காவிகள், λ எண்ணியாக இருக்க,

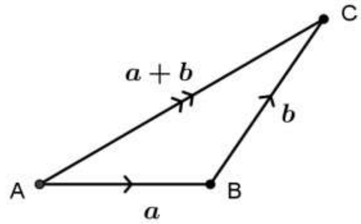
$\underline{b} = \lambda\, \underline{a}$ எனின், $\underline{a}, \underline{b}$ சமாந்தரமான காவிகள் எனப்படும்.

1.11 காவிக்கூட்டல்

காவிகள் $\underline{a},\underline{b}$ என்பன $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ என்பவற்றால் வகை குறிக்கப்படுகின்றதென்க. காவி $\underline{a}$, களினதும் காவி $\underline{b}$ யினதும் காவிக்கூட்டல் $\overrightarrow{AC}$ என வரையறுக்கப்படும்.

இது காவிக்கூட்டலுக்கான முக்கோணி விதி என வரையறுக்கப்படும்

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \underline{a} + \underline{b}$$

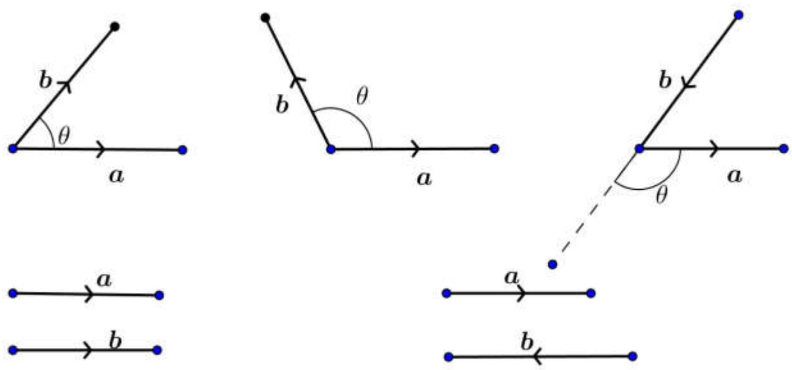


1.12 காவியின் வரைவிலக்கணம்

காவி பருமனும் திசையும் கொண்டதும், முக்கோணக் காவிக் கூட்டல் விதிக்கு அமைவானதாகும்.

1.13 இரு காவிகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம்

$\underline{a},\underline{b}$ என்பன இரு காவிகள். $\underline{a},\underline{b}$ என்பவற்றிற் கிடையேயான கோணம் θ படத்தில காட்டப்படுள்ளது.



குறிப்பு : $O \le \theta \le \pi$ ஆகும்

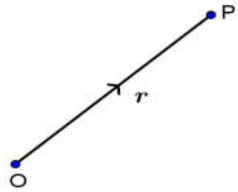
$\underline{a},\underline{b}$ சமாந்தரமாகவும், ஒரே திசையிலுமிருப்பின் $\theta = \odot$ ஆகும்.

$\underline{a},\underline{b}$ சமாந்தரமாகவும் எதிர்த்திசையிலுமிருப்பின் $\theta = \pi$ ஆகும்.

1.14 தானக்காவி

நிலையான புள்ளி O வைக் குறித்து, யாதுமொரு புள்ளி P யின் நிலை $\overrightarrow{OP}$ ஆல் குறிக்கப்படும்.

காவி $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$, O வைக் குறித்து P யின் தனாக்காவி எனப்படும்.

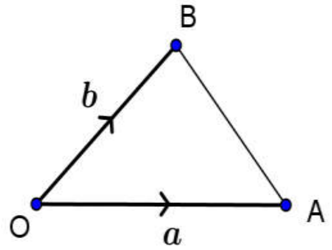


A, B எனுமிரு புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் $\underline{a}, \underline{b}$ என்க. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= \underline{b} - \underline{a}$ ஆகும்.



1.15 அட்சரகணித விதிகள்

$\underline{a}, \underline{b}, \leq$ காவிகள், λ, μ எண்ணிகள் ஆகும்.

(i) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

(ii) $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

(iii) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$

(iv) $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a} = \underline{0} + \underline{a}$

(v) $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0} = (-\underline{a}) + \underline{a}$

(vi) $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$

(vii) $\lambda\mu(\underline{a}) = \lambda[\mu\underline{a}] = \mu[\lambda\underline{a}]$

நிறுவல்

(i) $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}$ என்க

இணைகரம் $ABCD$ யைப் பூர்த்தியாக்குக.

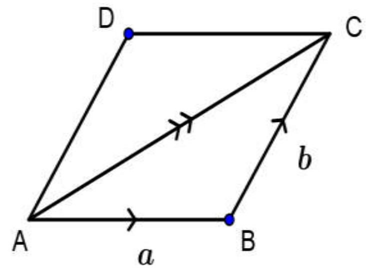
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \underline{a}$; $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{BC} = \underline{b}$

காவிக் கூட்டல் விதிப்படி,

முக்கோணி ABC இல், $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$

முக்கோணி ADC இல் $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \underline{b} + \underline{a}$

எனவே $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$



(ii) $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \ \overrightarrow{BC} = \underline{b}, \ \overrightarrow{CD} = \underline{c}$ என்க.

காவிக்கூட்டல் விதிப்படி,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= \underline{a} + \left(\underline{b} + \underline{c}\right)$

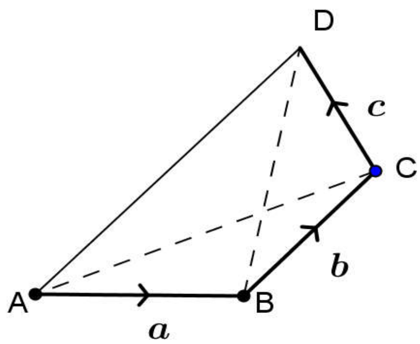
காவிக்கூட்டல் விதிப்படி,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

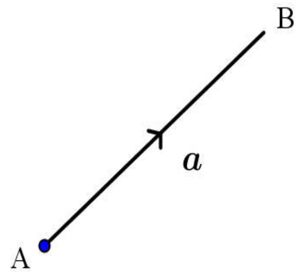
$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD}$

$= \left(\underline{a} + \underline{b}\right) + \underline{c}$

எனவே $\underline{a} + \left(\underline{b} + \underline{c}\right) = \left(\underline{a} + \underline{b}\right) + \underline{c}$



(iii) $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ என்க.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB}$

$\underline{a} = \underline{a} + \underline{o}$ ——— (1)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$

$\underline{a} = \underline{o} + \underline{a}$ ——— (2)

(1), (2) இலிருந்து $\underline{a} + \underline{o} = \underline{a} = \underline{o} + \underline{a}$

(iv) $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ என்க

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

$\underline{a} + \left(-\underline{a}\right) = \underline{o}$ ——— (1)

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB}$

$\left(-\underline{a}\right) + \underline{a} = \underline{o}$ ——— (2)

(1), (2) இலிருந்து $\underline{a} + \left(-\underline{a}\right) = \underline{o} = \left(-\underline{a}\right) + \underline{a}$

(v) $\lambda\left(\underline{a} + \underline{b}\right) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ என்க.

$\lambda > o$ என்க.

OA (அல்லது நீட்டப்பட்ட OA) இல் புள்ளி A' ஐ,

$OA' = \lambda OA$ ஆகுமாறு எடுக்கப்படுகிறது.

A' இனூடு, AB இற்கு சமாந்தரமாக வரையப்படும் நேர்கோடு OB யை (அல்லது நீட்டப்பட்ட OB யை) B' இல் சந்திக்கிறது.

$\Delta\, OAB$, $\Delta OA'B'$ இயல்பொத்தவை.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \lambda$$

$\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{OB}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{OA'} = \lambda\underline{a}$; $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\underline{b}$

$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$

$= \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$ ——— (1)

$\overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{OB}$

$= \lambda\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right)$

$= \lambda\left(\underline{a} + \underline{b}\right)$ ——— (2)

(1), (2) இலிருந்து $\lambda\left(\underline{a} + \underline{b}\right) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$

வகை II $\lambda < 0$ என்க.

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA} = \lambda\underline{a}$

BA யிற்கு சமாந்தரமாக, A' இனூடு வரையப்படும் கோடு $A'B'$ நீட்டப்பட்ட BO வை B' இல் சந்திக்கின்றது.

இப்பொழுது $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \underline{b}, \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$ ஆகும்.

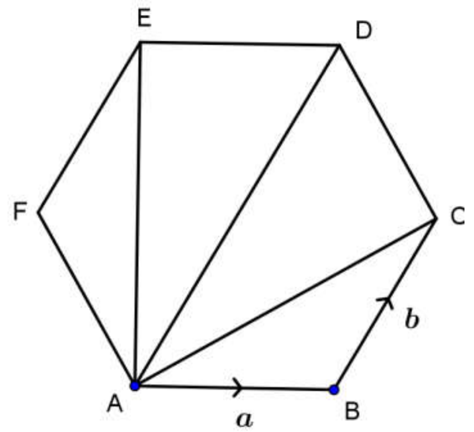
இயல்பொத்த முக்கோணங்களைப் பயன்படுத்தி,

$$\lambda\left(\underline{a}+\underline{b}\right) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$$ என நிறுவலாம்.

1.16 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 1

$ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}$ எனின், காவிகள் $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ என்பவற்றை $\underline{a}, \underline{b}$ இன் உறுப்புக்களில் காண்க.



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$ ——— (1) F

கேத்திரகணிதத்தைப் பயன்படுத்த,

$AD = 2AB, AD \parallel AB$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{2AB} = 2\underline{b}$ ——— (2)

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = 2\underline{b} + \left(-\underline{a}\right) = 2\underline{b} - \underline{a}$ ——— (3)

கேத்திரகணிதப் பண்புகளிலிருந்து

$BC = FE$, $\mathrm{BC} \parallel FE$; $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC} = \underline{b}$; $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -\underline{b}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \left(2\underline{b} - \underline{a}\right) + \left(-\underline{b}\right) = \underline{b} - \underline{a}$ ——— (4)

உதாரணம் 2

A, B எனும் புள்ளிகளின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகும்.

(i) AB யின் நடுப்புள்ளி C

(ii) புள்ளி D, AB யில் $AD : DB = 1 : 2$ ஆகுமாறு உள்ளது.

(iii) புள்ளி E, AB யில் $AE : EB = 1 : 2$ ஆகுமாறு உள்ளது.

C, D, E என்பவற்றின் தானக் காவிகளைக் காண்க.

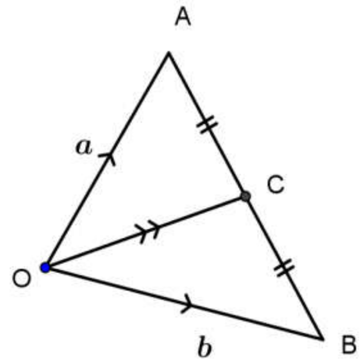
(i) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \underline{a} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$



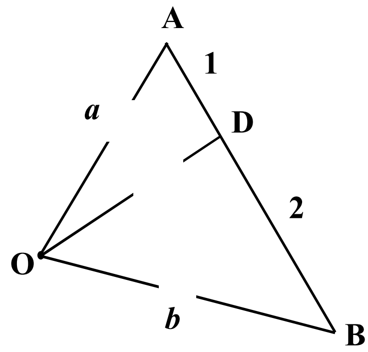
(ii) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $AD : DB = 1:2$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\underline{b} - \underline{a})$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \underline{a} + \frac{1}{3}(\underline{b} - \underline{a})$

$= \frac{2}{3}\underline{a} + \frac{1}{3}\underline{b} = \frac{1}{3}(2\underline{a} + \underline{b})$



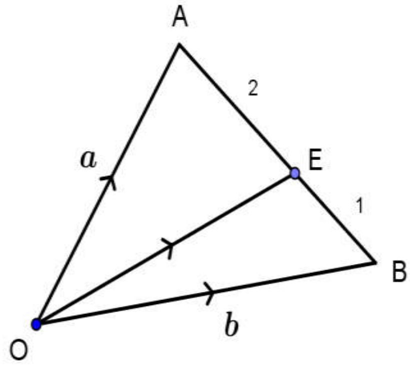
(iii) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = b$; $AE : ED = 2:1$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\underline{b} - \underline{a})$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \underline{a} + \frac{2}{3}(\underline{b} - \underline{a})$

$= \frac{1}{3}\underline{a} + \frac{2}{3}\underline{b} = \frac{1}{3}(\underline{a} + 2\underline{b})$



உதாரணம் 3

புள்ளிகள் A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே நிலையான புள்ளி O வைக் குறித்து $-2\underline{p} + 5\underline{q}$, $7\underline{p} - \underline{q}$, $\underline{p} + 3\underline{q}$ ஆகும். இங்கு p, q என்பன இரு சமாந்தரமற்ற காவிகள். A, B, C ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ளன எனக் காட்டி, C யைப் பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.

$\overrightarrow{OA} = -2\underline{p} + 5\underline{q}, \quad \overrightarrow{OB} = 7\underline{p} - \underline{q} \quad \overrightarrow{OC} = \underline{p} + 3\underline{q}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7\underline{p} - \underline{q}) - (-2\underline{p} + 5\underline{q}) = a\underline{p} - 6\underline{q}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (\underline{p} + 3\underline{q}) - (-2\underline{p} + 5\underline{q}) = 3\underline{p} - 2\underline{q}$

$\overrightarrow{AB} = 9\underline{p} - 6\underline{q} = 3(3\underline{p} - 2\underline{q}) = 3\overrightarrow{AC}$

எனவே, A, B, C ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன $AC : CB = 1:2$

உதாரணம் 4

$\underline{a},\underline{b}$ என்பன பூச்சியமற்ற சமாந்தர மற்ற காவிகள் α,β எண்ணிகள் $\alpha\,\underline{a}+\beta\underline{b}=\underline{0}$ எனின், எனின் மட்டும் $\alpha=\beta=0$ எனக் காட்டுக.

$\alpha=0,\ \beta=0$ என்க

$$\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}=o\underline{a}+o\underline{b}=\underline{o}+\underline{o}=\underline{o} \qquad (1)$$

மறுதலையாக $\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}=\underline{o}+\beta\underline{b}=\underline{o}$ என்க

வகை (i) $\alpha=o$ என்க

$\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}=\underline{o}+\beta\underline{b}=\underline{o}$

$\beta\underline{b}=\underline{o};\ \underline{b}\neq o$ எனவே $\beta=o$

எனவே $\alpha=o$ எனின் $\beta=o$ ஆகும்
இவ்வாறே $\beta=o$ எனின் $\alpha=o$ என நிறுவலாம்.

வகை (ii) $\alpha\neq o$ என்க.

$\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}=\underline{o}$

$\alpha\underline{a}=-\beta\underline{b}$

$\underline{a}=-\dfrac{\beta}{\alpha}\underline{b}$

எனவே $\underline{a},\underline{b}$ சாமந்தரமற்ற காவிகள்.
இது தரவிற்கு முரணானது
எனவே $\alpha=o$ ஆகும்

முந்திய நிறுவலின்படி $\alpha=o$ எனின், $\beta=o$ ஆகும்
$\alpha=o,\ \beta=o \Leftrightarrow \alpha\underline{a}+\beta\underline{b}=\underline{o}$ ஆகும்.

உதாரணம் 5

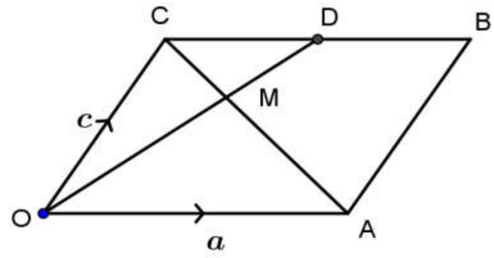
$OABC$ ஓர் இணைகரம் BC யின் நடுப்புள்ளி D. OD, AC என்பன M இல் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{OA}=\underline{a},\overrightarrow{OC}=\underline{c}$ ஆகும்

(i) $\overrightarrow{OD}$ யை $\underline{a},\underline{c}$ யின் உறுப்புக்களில் காண்க.

(ii) $OM:MD=\lambda:1$ எனின், $\overrightarrow{OM}$ ஐ $\underline{a},\underline{c},\lambda$ வின் உறுப்புக்களில் காண்க

(iii) $AM:MC=\mu:1$ எனின், $\overrightarrow{OM}$ ஐ $\underline{a},\underline{c},\mu$ வின் உறுப்புக்களில் காண்க

(iv) மேலே (ii), (iii) இல் பெறப்பட்ட முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி λ, μ வின் பெறுமானங்களைக் காண்க.



$$\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OC} = \underline{c}; \overrightarrow{CB} = \underline{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$= \underline{c} + \frac{1}{2}\underline{a} \quad \text{——} \quad (1)$$

$$OM : MD = \lambda : 1$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OD} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{c}\right) \quad \text{——} \quad (1)$$

$$AM : MC = \mu : 1$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{AC} = \frac{\mu}{\mu+1}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\mu}{\mu+1}\left(\underline{c} - \underline{a}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu+1}\underline{a} + \frac{\mu}{\mu+1}\underline{c} \quad \text{——} \quad (2)$$

(1), (2) இலிருந்து,

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}\underline{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\underline{c} = \frac{1}{\lambda+1}\underline{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\underline{c}$$

$\underline{a}, \underline{c}$ சமந்தரமற்ற காவிகள் என்பதால்,

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+1)} = \frac{1}{\mu+1} \quad \text{——} \quad (3)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{\mu}{\mu+1} \quad \text{——} \quad (4)$$

$$(3) \div (4), \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{\mu}, \mu = 2$$

$\therefore \ \mu = 2,$ இலிருந்து (3) $\quad \dfrac{\lambda}{2(\lambda+1)} = \dfrac{1}{3}, \lambda = 2$

$$\lambda = \mu = 2$$

எனவே $OM : MD = AM : MC = 2 : 1$

1.17 பயிற்சி

1. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{AC} = \underline{b}$ ஆகும். $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ என்பவற்றை $\underline{a}, \underline{b}$ இன் உறுப்புக்களில் காண்க.

2. $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி O அதன்மையம் ஆகும். $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ எனின், $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}$ என்பவற்றை $\underline{a}, \underline{b}$ இல் காண்க.

3. $ABCD$ ஒரு தள நாற்பக்கல் நாற்பக்கலின் தளத்தில் O யாதுமொரு புள்ளி $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BO}$ எனின் $ABCD$ இணைகரம் என நிறுவுக.

4. ABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணி $BA = BC$ AC யின் நடுப்புள்ளி D ஆகும். $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$ எனக் காட்டுக.

5. $\underline{a}, \underline{b}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு காவிகள், காவிக் கூட்டல் விதியைப் பயன்படுத்தி $|\underline{a} + \underline{b}| = |\underline{a} - \underline{b}|$ எனக் காட்டுக. $|\underline{a} - \underline{b}| = 5, |\underline{a}| = 3$ எனின் $|\underline{b}|$ ஐக் காண்க.

6. $\underline{a}, \underline{b}$ எனுமிரு காவிகள், $|\underline{a}| = |\underline{b}| = 6,$ ஆகவும் $\underline{a}, \underline{b}$ இற்கிடையேயான கோணம் 60^0 ஆகவும் உள்ளன. $|\underline{a} + \underline{b}|, |\underline{a} - \underline{b}|$ என்பவற்றைக் காண்க.

காவிகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வினாக்களைச் செய்க.

7. ABC ஒரு முக்கோணி D, E என்பன AB, AC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளாகும். $DE = \frac{1}{2}BC$, $DE \| BC$ எனவும் காட்டுக.

8. $ABCD$ ஒரு நாற்பக்கல். P, Q, R, S என்பன முறையே AB, BC, CD, DA என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். $PQRS$ ஓர் இணைகரம் எனக் காட்டுக.

9. முக்கோணி ABC இன் உச்சிகள் A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ஆகும். முக்கோணியின் மையப் போலிகள் தானக்காவியைக் காண்க.

10. $OABC$ ஓர் இணைகரம் AB யின் நடுப்புள்ளி D . OD, AC என்பன E யில் இடை வெட்டுகின்றன.

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ $OE : ED = \lambda : 1$, $CE : EA = \mu : 1$ ஆகும்.

(i) $\overrightarrow{OD}$ யை $\underline{a}, \underline{b}$ இன் உறுப்புக்களில் காண்க. இதிலிருந்து காவி $\overrightarrow{OE}$ யை இல் $\lambda, \underline{a}, \underline{b}$ எழுதுக.

(ii) காவி $\overrightarrow{AC}$ ஐக் காண்க. $\overrightarrow{OE}$ யை $\mu, \underline{a}, \underline{b}$ இல் எழுதுக.

(iii) மேலே (i), (ii) இல் பெற்ற முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி λ, μ வைக் காண்க.

(iv) OD, CB நீட்டப்படும் பொழுது H இல் சந்திப்பின் $\overrightarrow{OH}$ ஐக் காண்க.

11. $OABC$ ஒரு நாற்பக்கல். OB, AC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D, E ஆகும். DE இனது நடுப்புள்ளி F ஆகும்.

A, B, C என்பவற்றின் தானக்காவிகள் O வைக் குறித்து, முறையே $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ஆகும். $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$ எனக் காட்டுக.

OA, BC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P, Q ஆகும். புள்ளிகள் P, Q, F ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளன எனக் காட்டுக. $PF : FQ$ விகிதத்தைக் காண்க.

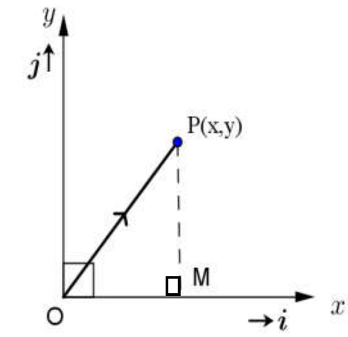
12. புள்ளிகள் A, B என்பன, புள்ளி O உடன் ஒரே நேர்கோட்டிலமையாத இரு புள்ளிகளாகும். AB யில் D எனும் புள்ளி $BD = 2DA$ ஆகுமாறு உள்ளது. O வைக் குறித்து D யின் தானக்காவி $\frac{1}{3}(2\underline{a} + \underline{b})$ எனக் காட்டுக.

$\overrightarrow{BC} = k\underline{a}\,(k > 1), O, D, C$ என்பன ஒரு நேர் கோட்டிலும் அமையுமாறு உள்ளன எனின் k யின் பெறுமானத்தையும் விகிதம் $OD : DC$ யையுங் காண்க. $\overrightarrow{AC}$ ஐ $\underline{a}, \underline{b}$ இல் காண்க.

மேலும் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக O வினூடு செல்லுங்கோடு AB யை E யில் சந்திப்பின் $6DE = AB$ எனக் காட்டுக.

13. $ABCD$ ஒரு சரிவகம் $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ஆகும். $\overrightarrow{AB} = p, \overrightarrow{AD} = q$ ஆகும். BC யின் மீது E எனும் புள்ளி $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ஆகுமாறு உள்ளது. AE, BD என்பன வெட்டும் புள்ளி F, $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD}$ யைத் திருப்தி செய்கிறது, இங்கு $\lambda\,(0 < \lambda < 1)$ ஒரு மாறிலி யாகும். $\overrightarrow{AF} = (1-\lambda)\underline{p} + \lambda\underline{q}$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து λ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

1.18 தெக்காட்டின் காவி வகைக் குறிப்பு



தெக்காட்டின் தளம் xoy ஐக் கருதுக.

தளம் Oxy இல் Ox ,Oy வழியேயான அலகுக் காவிகள் முறையே $\underline{i}, \underline{j}$

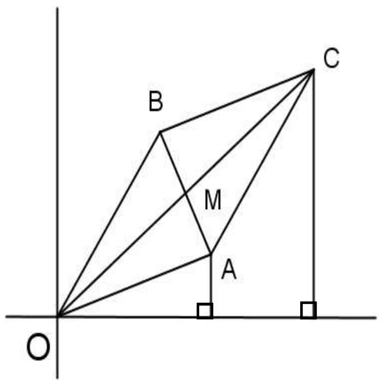
$P \equiv (x, y)$ என்க

$\overrightarrow{OP} = \underline{r}$ என்க

$\underline{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = x\underline{i} + y\underline{j}$

$\left|\overrightarrow{OM}\right| = OM = x$; $\left|\overrightarrow{MP}\right| = MP = y$ ஆகும்

$|\underline{r}| = OP = \sqrt{OM^2 + MP^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$



$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j}$, $\quad \underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j}$

எனின் $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1)\underline{i} + (a_2 + b_2)\underline{j}$ ஆகும்.

$\overrightarrow{OA} = \underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j}$; $A \equiv (a_1, a_2)$

$\overrightarrow{OB} = \underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j}$ $\quad B \equiv (b_1, b_2)$

$OACB$ இணைகரம்

M ,AB யின் நடுப்புள்ளி $\quad M \equiv \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$

$O \equiv (0,0)$, $M \equiv \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) OM = MC$ எனவே $C \equiv (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$\overrightarrow{OC} = (a_1 + b_1)\underline{i} + (a_2 + b_2)\underline{j}$

உதாரணம் 6

$A \equiv (2, -1)$, $B \equiv (5, 3)$ எனின்

(i) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}$ என்பவற்றை இல் எழுதுக.

(ii) $\left|\overrightarrow{OA}\right|, \left|\overrightarrow{\text{OB}}\right|, \left|\overrightarrow{AB}\right|$ என்பவற்றைக் காண்க.

(iii) $\overrightarrow{AB}$ யின் திசையிலான அலகுக் காவியைக் காண்க.

(i) $\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} - \underline{j}$ $\quad \overrightarrow{OB} = 5\underline{i} + 3\underline{j}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5\underline{i} + 3\underline{j}) - (2\underline{i} - \underline{i}) = 3\underline{i} + 4\underline{j}$

(ii) $\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} + \underline{j}$, $\quad\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{OB} = 5\underline{i} + 3\underline{j}$, $\quad\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AB} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$, $\quad\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

(iii) $\overrightarrow{AB} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$

$\overrightarrow{AB}$ யின் திசையிலான அலகுக்காவி $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{3\underline{i} + 4\underline{j}}{5} = \dfrac{1}{5}\left(3\underline{i} + 4\underline{j}\right)$

1.19 பயிற்சி

1. $\underline{a} = \underline{i} - 2\underline{j}$, $\quad\underline{b} = 4\underline{j}$, $\quad\underline{c} = 3\underline{i} - \underline{j}$ என்க.
பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) (a) $2\underline{a} + \underline{b}$ (b) $\underline{a} + 3\underline{c}$ (c) $2\underline{a} - \underline{b} - \underline{c}$

(ii) (a) $\left|2\underline{a} + \underline{b}\right|$ (b) $\left|\underline{a} + 3\underline{c}\right|$ (c) $\left|2\underline{a} - \underline{b} - \underline{c}\right|$

(iii) $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ யின் திசையிலான அலகுக்காவி

2. $A \equiv (4,3)$, $\quad B \equiv (6,6)$, $\quad C \equiv (0,1)$ எனின்

(a) காவிகள் $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ யை எழுதுக

(b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ யைக் காண்க.

(c) $\left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\overrightarrow{BC}\right|, \left|\overrightarrow{CA}\right|$ யைக் காண்க.

3. O உற்றபத்தியாகவும் $\overrightarrow{OA} = -\underline{i} + 5\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\underline{i} + 4\underline{j}$ $\overrightarrow{OC} = 2\underline{j}$ ஆகவும் உள்ளது. இதிலிருந்து ABC இருசமபக்க முக்கோணி என நிறுவுக.

4. $\overrightarrow{OA} = \underline{i} + 2\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\underline{i} - \underline{j}$, $\overrightarrow{OC} = -\underline{i} + 5\underline{j}$ ஆகும்.
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$ என்பவற்றைக் காண்க. இதிலிருந்து A, B, C ஒரு நேர் கோடடில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

5. A, B எனும் இருபுள்ளிகளின் தானக் காவிகள் $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகும்.

$\underline{a} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$ $\quad\quad$ $\underline{b} = \underline{i} + 5\underline{j}$ ஆகும்.

(i) AB யின் நடுப்புள்ளி R எனின், R இன் தானக்காவியை $\underline{i}, \underline{j}$ இல் காண்க.

(ii) $\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}$ எனின், C யின் திசையிலான அலகுக்காவியை $\underline{i}, \underline{j}$ இல் காண்க.

6. (a) $3\underline{i} - 4\underline{j}$ இன் திசையிலான 10 அலகு பருமனுடைய காவியை $a\underline{i} - b\underline{j}$ வடிவில் தருக.

(b) $A \equiv (-2, -5)$, $\quad\quad$ $B \equiv (3, 7)$ எனின்

(i) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ காவிகளை எழுதி $\overrightarrow{AB}$ யைக் காண்க.

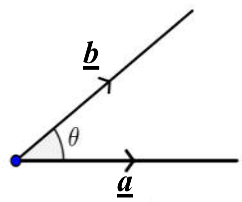
(ii) $\overrightarrow{AB}$ யின் திசையிலான 65 அலகு பருமனுடைய காவியை $a\underline{i} - b\underline{j}$ வடிவில் காண்க.

1.20 இரு காவிகளின் எண்ணிப் பெருக்கம்

காவிகளின் கூட்டல், வித்தியாசம், என்பவற்றைப் பற்றிக் கற்றுள்ளோம். இரு வகையான பெருக்கங்கள் காவிகளில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) இரு காவிகளின் எண்ணிப்பெருக்கம் (அல்லது குற்றுப்பெருக்கம்)

(ii) இரு காவிகளின் காவிப் பெருக்கம் (அல்லது குறுக்குப்பெருக்கம்)



இரு காவிகளின் எண்ணிப்பெருக்கம் ஓர் எண்ணியாகும்.
இரு காவிகளின் காவிப் பெருக்கம் ஒரு காவியாகும்.

வரைவிலக்கணம் எண்ணிப்பெருக்கம்
இரு காவிகளின் $\underline{a}, \underline{b}$ இற்கிடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$\underline{a}, \underline{b}$ யின் எண்ணிப்பெருக்கும் $\underline{a}.\underline{b}$ ஆனது,

$\underline{a} - \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta \quad\quad (o \le \theta \le \pi)$ என வரையறுக்கப்படும்

எண்ணிப்பெருக்கத்தின் பண்புகள்

1. $\underline{a}.\underline{b} = \underline{b}.\underline{a}$ எனவே ஆகும்.

$\underline{a}.\underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}|\ \cos\theta$

$\underline{b}.\underline{a} = |\underline{b}|\ |\underline{a}|\ \cos\theta$

எனவே $\underline{a}.\underline{b} = \underline{b}.\underline{a}$ ஆகும்.

2. $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ என்பன பூச்சியமற்ற இருகாவிகள்.

$\underline{a}.\underline{b} = 0$ எனின், எனின் மட்டும் $\underline{a}, \underline{b}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

$\underline{a} \neq \underline{0}, \underline{b} \neq \underline{0}$

$$\underline{a}.\underline{b} = \underline{o} \quad \Leftrightarrow \quad |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta = 0 \ \left(|\underline{a}|\,|\underline{b}| \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad \underline{a}, \underline{b}$ செங்குத்தானவை.

3. $\underline{a}.\underline{a} = |\underline{a}|\ |\underline{a}| \cos o \ = |\underline{a}|^2$, எனவும் எழுதப்படும்.

$$\underline{i}.\underline{i} = |\underline{i}|\ |\underline{i}| \cos o = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\underline{\mathrm{j}}.\underline{\mathrm{j}} = |\underline{\mathrm{j}}|\ |\underline{\mathrm{j}}| \cos o = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\underline{\mathrm{i}}.\underline{\mathrm{j}} = |\underline{\mathrm{i}}|\ |\underline{\mathrm{j}}| \cos\frac{\pi}{2} = 1 \times 1 \times 0 = 0$$

எனவே $\quad \underline{\mathrm{i}}.\underline{\mathrm{i}} = \underline{\mathrm{j}}.\underline{\mathrm{j}} = 1; \qquad \underline{\mathrm{i}}.\underline{\mathrm{j}} = \underline{\mathrm{j}}.\underline{\mathrm{i}} = 0$

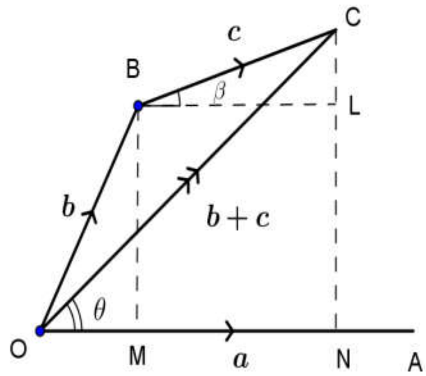
4. $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ என்பன காவிகள்

$\underline{a}.(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}.\underline{b} + \underline{a}.\underline{c}$ ஆகும்.

$\underline{a}, \underline{b}$ இற்கிடைப்பட்ட கோணம் α,

$\underline{a}, \underline{c}$ இற்கிடைப்பட்ட கோணம் β,

$\underline{a}, (\underline{b} + \underline{c})$ இற்கிடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.



$$\underline{\boldsymbol{a}} \bullet (\underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{c}}) = |\underline{\boldsymbol{a}}| \bullet |\underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{c}}| \cos\theta$$

$$= (OA)\ (OC) \cos\theta$$

$$= (OA) . (ON)$$

$$= (OA)\ (OM + MN)$$

$$= OA.OM + OA . MN$$

$$= OA.\ OB \cos\alpha + OA.\ BC\cos\beta \qquad (MN = BL)$$

$$= \underline{\boldsymbol{a}} \bullet \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{a}} \bullet \underline{\boldsymbol{c}}$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{a}} . (\underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{c}}) = \underline{\boldsymbol{a}} \bullet \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{a}} \bullet \underline{\boldsymbol{c}}$$

5. Let $\underline{\boldsymbol{a}} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j}$ உம் $\underline{\boldsymbol{b}} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j}$ உம் எனக் கொள்க.

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{a}} \bullet \underline{\boldsymbol{b}} &= (a_1\underline{i} + a_2\underline{j}) \bullet (b_1\underline{i} + b_2\underline{j})\\ &= a_1\underline{i} \bullet (b_1\underline{i} + b_2\underline{j}) + a_2\underline{j} \bullet (b_1\underline{i} + b_2\underline{j})\\ &= a_1\underline{i} \bullet b_1\underline{i} + a_1\underline{i} \bullet b_2\underline{j} + a_2\underline{j} \bullet b_1\underline{i} + a_2\underline{i} \bullet b_2\underline{j}\\ &= a_1b_1 + a_2b_2\end{aligned}$$

(ஏனென்றால் $\underline{i} \bullet \underline{i} = \underline{j} \bullet \underline{j} = 1$ and $\underline{i} \bullet \underline{j} = \underline{j} \bullet \underline{i} = 0$)

உதாரணம் 7

$\underline{\boldsymbol{a}} = 2\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}$ உம் $\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}$ உம் ஆயின˙ $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ இற்கிடையிலான கோணத்தினைக் காண்க.

$$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cos\theta$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \qquad |\underline{b}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = \sqrt{13} \times \sqrt{10}\ \cos\theta \text{ ——— ①}$$

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} &= (2\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}) \cdot (\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}})\\ &= 2\underline{\boldsymbol{i}} \cdot (\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}) - 3\underline{\boldsymbol{j}} \cdot (\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}})\\ &= 2 + 0 - 0 + 9 = 11 \text{ ——— ②}\end{aligned}$$

(1) , (2) இலிருந்து $\sqrt{130}\ \cos\theta = 11$

$$\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{130}},\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$$

உதாரணம் 8

i. $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ என்பன $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a}+\underline{b}|$,
ஆகுமாறுள்ள இரு காவிகளாகும். $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ இற்கிடையிலான கோணத்தினைக் காண்க.

ii. $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ எனும் இரு காவிகள் $\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}$ இற்கு செங்குத்தானவை. $|\underline{b}| = \sqrt{2}|\underline{\boldsymbol{a}}|$ எனத் தரப்படின் $(2\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$ ஆனது $\underline{\boldsymbol{b}}$ இற்கு செங்குத்தானது எனக் காட்டுக.

i. $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a}+\underline{b}|$

$|\underline{a}|^2 = |\underline{a}+\underline{b}|^2$

$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{a}} = (\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}) \cdot (\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$ (வரைவிலக்கணப்படி)

$|\underline{a}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{b}}$

$-|\underline{b}|^2 = 2|\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\theta$

$-|\underline{b}|^2 = 2|\underline{b}|\,|\underline{b}|\cos\theta$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2} \qquad \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

ii. $(\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}) \cdot \underline{\boldsymbol{a}} = 0 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 0$

$|\underline{a}|^2 + \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 0$ .... ①

$(2\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}}) \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 2\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{b}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$

$= 2\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} + |\underline{b}|^2$

$= -2|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2$ (① இலிருந்து)

$= -2|\underline{a}|^2 + 2|\underline{a}|^2$ (ஏனென்றால், $|\underline{b}| = \sqrt{2}\underline{\boldsymbol{a}}$)

$= 0$

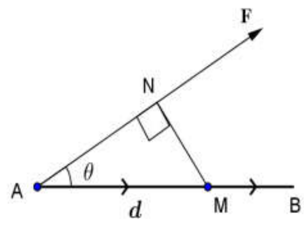
எனவே $(2\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$ ஆனது $\underline{\boldsymbol{b}}$ இற்கு செங்குத்தாகும்.

உதாரணம் 9

அடரொன்றில் தாக்கும் மாறாவிசை $\underline{\boldsymbol{F}}$ ஆனது, அதனை AB திசையில் $\boldsymbol{d}$ தூரத்தினால் இயங்கச் செய்கின்றது. இங்கு $\overrightarrow{AB}$ ஆனது $\underline{\boldsymbol{F}}$ உடன் θ கோணத்தினை அமைக்கின்றது. செய்யப்பட்ட வேலை $\underline{\boldsymbol{F}} \cdot \underline{\boldsymbol{d}}$ ஆகும்.

$\underline{\boldsymbol{F}} = 2\underline{\boldsymbol{i}} + 3\underline{\boldsymbol{j}}$ இன் பிரயோகப்புள்ளியானது $\underline{\boldsymbol{S}} = 5\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}}$ எனும் இடப்பெயர்ச்சியினை அடையுமாயின் விசை $\underline{\boldsymbol{F}}$ இனால் செய்யப்பட்ட வேலையினைக் காண்க.

$\underline{\boldsymbol{F}}$ ஆல் செய்யப்பட்ட வேலை

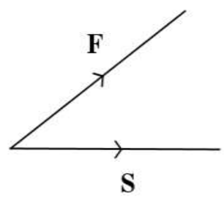


$= |\underline{F}|.AN$

$= |\underline{F}|.AM\cos\theta \qquad (\overrightarrow{AM} = d)$

$= \underline{\boldsymbol{F}} \cdot \underline{\boldsymbol{d}}$

$\underline{\boldsymbol{F}} \cdot \underline{\boldsymbol{S}}$ ஆல் செய்யப்பட்ட வேலை



$= (2\underline{\boldsymbol{i}} + 3\underline{\boldsymbol{j}}) \cdot (5\underline{\boldsymbol{i}} - 3\underline{\boldsymbol{j}})$

$= 2 \times 5 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1$ யூல்

1.21 பயிற்சி

1. $\underline{a} = 3\underline{i} + \underline{j}$, $\underline{b} = -\underline{i} + 2\underline{j}$ ஆயின் $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ இற்கிடையிலான கோணத்தினைக் காண்க.

2. $\underline{a} = p\underline{i} + 3\underline{j}$, $\underline{b} = 2\underline{i} + 6\underline{j}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான விசைகள் ஆகும்.
   - i. p யின் பெறுமானத்தினைக் காண்க.
   - ii. $|\underline{a}|$, $|3\underline{b} - \underline{a}|$ இன் பெறுமானத்தினைக் காண்க.
   - iii. $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot (3\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$ இனைக் காண்க.
   - iv. $\underline{\boldsymbol{a}}$, $(3\underline{\boldsymbol{b}} - \underline{\boldsymbol{a}})$ இற்கிடையிலான கோணத்தினைக் காண்க.

3. $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ எனும் இரு காவிகள் $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{a} - \underline{b}|$ ஆகுமாறு உள்ளன.
   $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ இற்கிடையிலான கோணத்தினைக் காண்க.

4. $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 2$ உம் $|\underline{a} - \underline{b}| = 4$ உம் ஆயின் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

   (i) $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$ (ii) $|\underline{a} + \underline{b}|$

5. $\underline{\boldsymbol{a}}$, $(\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}})$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு காவிகள் ஆயின்,
   $|\underline{a} + \underline{b}|^2 = |\underline{b}|^2 - |\underline{a}|^2$ எனக் காட்டுக.

6. காவிகளின் எண்ணிப்பெருக்கத்தினைப் பயன்படுத்தி சாய்சதுரம் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனக் காட்டுக.

7. $|\underline{a} + \underline{b}| = |\underline{a} - \underline{b}|$ ஆயின் $\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}} = 0$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து இணைகரமொன்றின் மூலைவிட்டங்கள் சமனாயின் அது ஓர் செவ்வகம் எனக் காட்டுக.

8. $\underline{\boldsymbol{i}}$, $\underline{\boldsymbol{j}}$ என்பன வழமையான அலகுக் காவிகளாகவும் $\underline{\boldsymbol{b}}$ என்பது $\sqrt{3}$ பருமனுடைய காவியாகவும் இருக்கையில் $\underline{a} = \underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}$ ஆல் தரப்படுகின்றது. காவிகள் $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ இற்கிடையிலான கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஆயின் $\underline{\boldsymbol{b}}$ ஐ $\boldsymbol{x}\underline{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y}\underline{\boldsymbol{j}}$ வடிவில் காண்க.

   இங்கு $\boldsymbol{x}\ (<0)$, $\boldsymbol{y}$ துணியப்படவேண்டிய மாறிலிகள்.

9. AB என்பது வட்டமொன்றின் விட்டமாகவும், P என்பது வட்டப் பரிதியிலுள்ள புள்ளியொன்றாகவும் இருக்கையில், APB ஓர் செங்கோணம் என எண்ணிப்பெருக் கத்தினை உபயோகித்துக் காட்டுக.

10. எண்ணிப்பெருக்கத்தினை உபயோகித்து யாதுமொரு முக்கோணம் ABC யின்,

    $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ எனக் காட்டுக.

2.0 துணிக்கையொன்றில் தாக்கும் ஒருதள விசைத்தொகுதி

2.1 அறிமுகம்

நிலையியல்

தாக்கத்தின் கீழ் ஓய்விலிருக்கும் பொருட்களின் (திண்மம்) விசைகளின் பொறியியல் நிலையியல் ஆகும்.

விசை

ஓய்விலுள்ள பொருளில் இயக்கத்தை ஏற்படுத்தும் அல்லது இயக்கத்தை ஏற்படுத்தமுனையும் அல்லது இயங்கும் பொருளின் இயக்கத்தின் தன்மையில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்தும் ஒரு செய்கை விசை ஆகும்.

விசையின் பருமன் நியூற்றன் அலகில் அளக்கப்படும். இது N இனால் குறிக்கப்படும்.

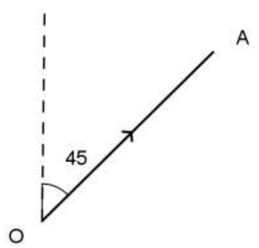
துணிக்கையொன்றில் தாக்கும் விசைகளின் விசேட தன்மைகளைக் குறிப்பிடல்.

i. விசையின் பருமன் ii. விசையின் திசை iii. பிரயோகப் புள்ளி

என்பவற்றால் பூரணமாகக் குறிக்கலாம்.

விசையின் பருமனுக்கு விகித சமமான நீளத்தைக் கொண்டதும் விசையின் திசையில் அமைவதுமான கோட்டுத் துண்டமொன்றினால் வகை குறிக்கப்படும்.

புள்ளி O இல் வட-கிழக்குத் திசையில் 10 நியூற்றன் (N) விசை தாக்குகின்றது. இவ்விசை 10 அலகு கோட்டுத்துண்டம் OA இனால் குறிக்கப்படும். இவ்வரிப்படத்தில் OA யின் அலகு 10 பருமனாகவும் OA வழியான அம்புக்குறி திசையையும் குறிக்கும்.



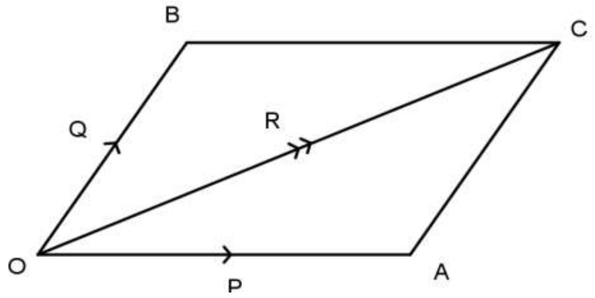
விளையுள் விசை

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகள் விறைப்பான பொருள் ஒன்றின்மீது தொழிற்படும் போது அவ்விசைகளுக்குச் சமனான ஒரு விளைவைத் தரக்கூடிய ஒரே விசை அவற்றின் விளையுள் விசை எனப்படும்.

2.2 விசை இணைகர விதி

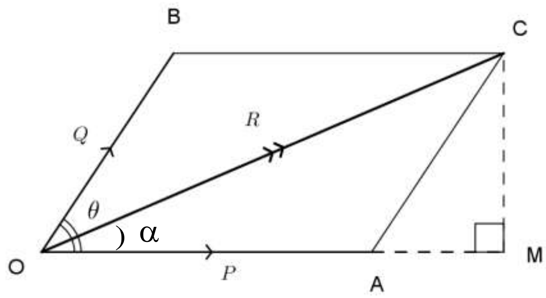
நிலையியலின் அடிப்படைத் தேற்றமான விசை இணைகர விதியினைப் பின்வருமாறு வாய்ப்புப் பார்த்தல்.

ஒரு புள்ளி O வில் தாக்கும் இரு விசைகள் பருமனிலும் திசையிலும் முறையே OA, OB என குறிக்கப்படுகின்றது. இவ்விரு விசைகளின் விளையுள் பருமனிலும் திசையிலும் பூர்த்தியாக்கப்பட்ட இணைகரம் OABC இன் மூலைவிட்டம் OC யினால் குறிக்கப்படும்.



P, Q என்னும் விசைகள் முறையே OA, OB என்பவற்றினால் குறிக்கப்படுகின்றது என்க. P, Q என்பவற்றின் விளையுள் R இணைகரம் OACB மூலைவிட்டம் OC ஆகும்.

விசைகள் P, Q இற்கு இடைப்பட்ட கோணம் O ஆகும். விளையுள் R விசை P யுடன் α கோணத்தை ஆக்குகின்றது.



பைதகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$OC^2 = OM^2 + MC^2$$

$$= (OA + AM)^2 + MC^2$$

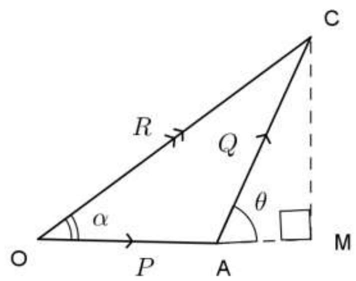
$$R^2 = (P + Q\cos\theta)^2 + (Q\sin\theta)^2$$

$$= P^2 + 2PQ\cos\theta + Q^2\cos^2\theta + Q^2\sin^2\theta$$

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{CM}{OM} = \frac{CM}{OA+AM}$$

$$= \frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}$$



$$\boxed{\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta \\ \tan\alpha &= \frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta} \end{aligned}}$$

$\theta = 90°$, $\cos\theta = \cos 90 = 0$; $\sin\theta = \sin 90 = 1$

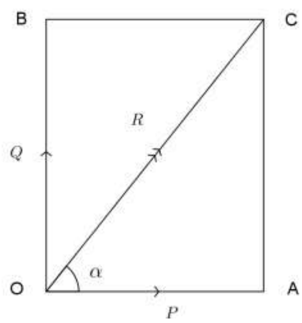
$R^2 = P^2 + Q^2$, $\tan\alpha = \dfrac{Q}{P}$

$Q = P$

$$R^2 = P^2 + P^2 + 2P \times P \times \cos\theta$$

$$= 2P^2 + 2P^2\cos\theta = 2P^2(1 + \cos\theta)$$

$$= 2P^2 \times 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 4P^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$



$$R = 2P.\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{P\sin\theta}{P+P\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}.cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

முறை II (கேத்திரகணிதத்தைப் பயன்படுத்துதல்)

$P = Q$; $OA = OB$ ஆகும்போது

இணைகரம் OACB ஓர் சாய்சதுரமாகும்.

i. OC, AB என்பன இடைவெட்டும் கோணம் செங்கோணமாகும்.

ii. $A\hat{O}C = B\hat{O}C \quad (=\frac{\theta}{2})$

$$OC = 2OM$$

$$= 2OA\cos\frac{\theta}{2}$$

$$R = 2P\cos\frac{\theta}{2}$$

உதாரணம் 1

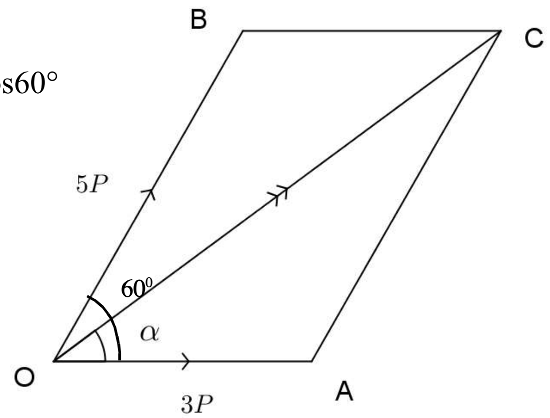
புள்ளியொன்றில் விசைகள் 3p, 5p என்பன 60° கோண இடைவெளியில் உள்ளன. விளையுள் விசையைக் காண்க.

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$= (3P)^2 + (5P)^2 + 2 \times 3P \times 5P \,.\, \cos 60^\circ$$

$$= 9P^2 + 25P^2 + 15P^2 = 49P^2$$

$$R = 7P$$



$$\tan\alpha = \frac{5P\sin 60^\circ}{3P+5P\cos 60^\circ}$$

$$\tan\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{11}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{11}\right)$$

உதாரணம் 2

புள்ளியொன்றில் தாக்கும் விசைகள் 8p, 5p யின் விளையுள் விசை 7p ஆகும். இவ்விரு விசைகளுக்கிடையான கோணத்தைக் காண்க.

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$

$$(7P)^2 = (8P)^2 + (5P)^2 + 2 \times 8P \times 5P\cos\theta$$

$$49P^2 = 64P^2 + 25P^2 + 80P^2\cos\theta$$

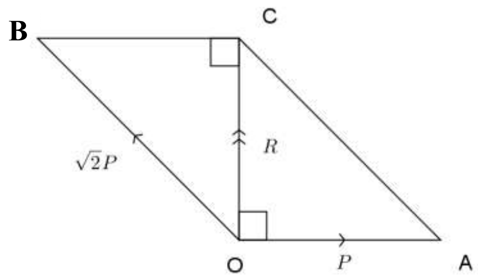
$$-40 = 80\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\theta = 120^\circ$$

உதாரணம் 3

இரு விசைகள் p, $\sqrt{2}p$ என்பவற்றின் விளையுள் விசை சிறிய விசையுடன் செங்கோணத்தை ஆக்குகின்றது. விளையுள் விசையையும் விசைகளுக்கிடையான கோணத்தையும் காண்க.

பைதகரஸ் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்க.



$$OC^2 + CB^2 = OB^2$$

$$R^2 + P^2 = \left(\sqrt{2}P\right)^2$$

$$R^2 = P^2; R = P;$$

ஆகவே $OC = BC$ உம் $B\hat{O}C = 45^\circ$

விசைகளுக்கிடையான கோணம் $60^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

2.3 விசையொன்றினை இரு திசைகளில் பிரித்தல்

a. தரப்பட்ட விசையொன்றினை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு திசைகளில் பிரித்தல்.

இரண்டு விசைகளை ஒரு தனி விளையுள் விசையாக ஒடுக்கலாம் என்பதனை விசை இணைகரவிதிமூலம் வாய்ப்புப் பார்த்தோம். அதேபோல் ஒரு தனிவிசை பல வழிகளில் இரண்டு விசைகளாகப் பிரிக்கலாம் என்பதை அறிவோம்.

துணிக்கையொன்றில் தாக்கும் விசை R என்க.

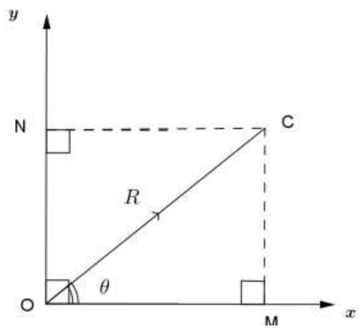
இது செங்குத்தான திசைகளில் இரு விசைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

விசை R, OC இனால் வகை குறிக்கப்படும்.

விசை R, OX, OY திசைகளில் பிரிக்கப்படும்.

விசை R, OX அச்சுடன் கோணம் θ வை அமைக்கின்றது.

OMCN ஓர் செவ்வகம் ஆகும்.



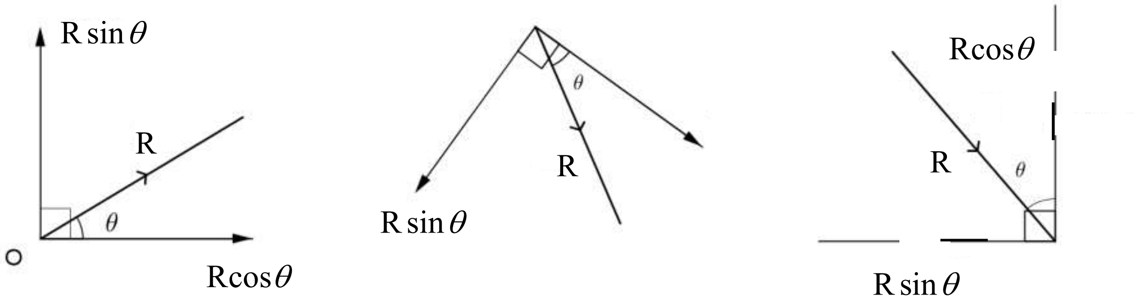
$\text{Cos}\,\theta = \frac{OM}{OC}$, $OM = OC\cos\theta = R\cos\theta$

$\text{Sin}\,\theta = \frac{MC}{OC}$, $MC = OC\sin\theta = R\sin\theta = ON$

விசை R ஆனது OX, OY வழியே முறையே $R\cos\theta$, $R\sin\theta$ எனப் பிரிக்கலாம் என அறிவோம்.

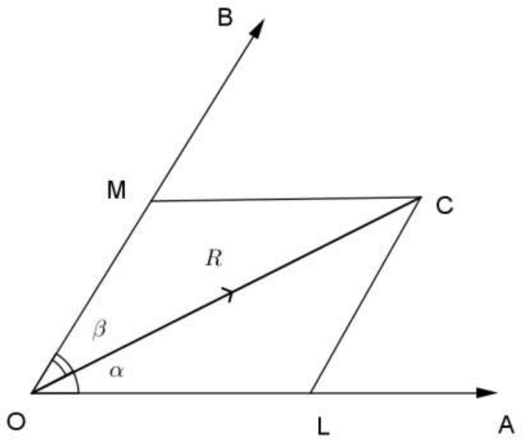
$\cos\theta = \frac{OM}{OC}$, $OM = OC\cos\theta = R\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{MC}{OC}$, $MC = OC\sin\theta = R\sin\theta = ON$



b. தரப்பட்ட விசையொன்றினை ஒன்றுக்கொன்று சாய்வான இரு திசைகளில் பிரித்தல்.

தரப்பட்ட விசை R, OA, OB என்பன தரப்பட்ட இரண்டு திசைகள் இவற்றின் ஊடாகத் தரப்பட்ட விசை R இனைப் பிரித்தல்.



விசை R, OC இனால் குறிக்கப்படும்.

C இனூடாக CM, CL என்னும் கோடுகளை முறையே OA, OB என்பவற்றுக்குச் சமாந்தரமாக வரைக. இப்பொழுது OLCM ஓர் இணைகரமாகும். எனவே OL, OM என்பன விசை R இன் பிரிவுகள் முறையே OA, OB இன் திசைகளில் ஆகும்.

$C\hat{O}A = \alpha$, $C\hat{O}B = \beta$ என்க.

Δ OLC இற்கு சைன் விதியைப் பிரயோகிக்க.

$$\frac{OL}{\sin O\hat{C}L} = \frac{LC}{\sin C\hat{O}L} = \frac{OC}{\sin O\hat{L}C}$$

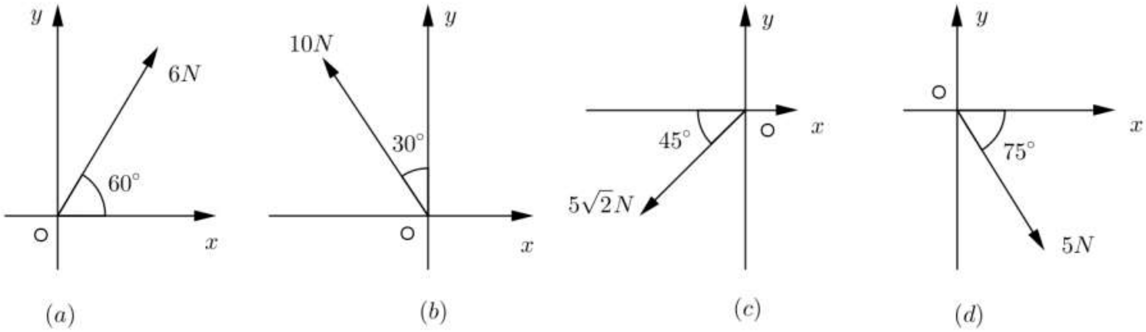
$$\frac{OL}{\sin\beta} = \frac{LC}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\left[180-(\alpha+\beta)\right]}$$

$$\frac{OL}{\sin\beta} = \frac{LC}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$OL = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad LC = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

விசையின் பிரிப்பு $\frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ என்பன முறையே OA, OB திசைகளில் ஆகும்.

உதாரணம் 4



$$(a) \quad \rightarrow X = 6\cos 60^0 = 6 \times \frac{1}{2} = 3N$$

$$\uparrow Y = 6\sin 60 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,N$$

$$(b) \quad \leftarrow X = 10\sin 30, = 10 \times \frac{1}{2} = 5N$$

$$\uparrow Y = 10\cos 30 = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,N$$

$$(c) \quad \leftarrow X = 5\sqrt{2}\cos 45 = 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5N$$

$$\downarrow Y = 5\sqrt{2}\sin 45 = 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5N$$

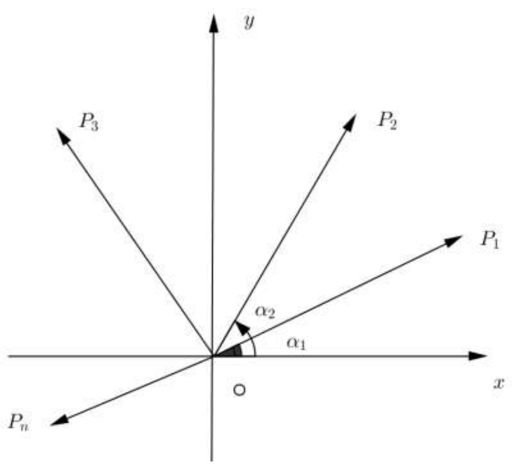
$$(d) \quad \rightarrow X = 5\cos 75 = 5\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)N$$

$$\downarrow Y = 5\sin 75 = 5\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)N$$

2.4 புள்ளியொன்றில் தாக்கும் ஒருதள விசைத் தொகுதியின் விளையுள்

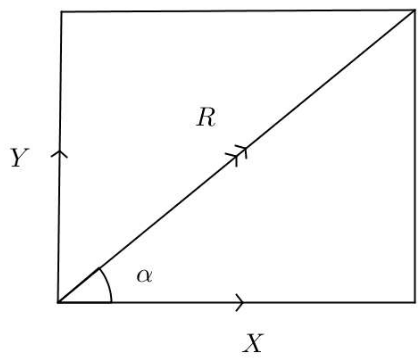
OX, OY என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுகள் தளம் XOY இல் ஒரு தொகுதி விசைகள் புள்ளி O வில் தாக்குகின்றது.

$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ என்னும் ஒரு தள விசைத் தொகுதிகள் புள்ளி O வில் தாக்குகின்றது. $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ விசைகள் அச்சு OX உடன் நேர் திசையில் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\alpha_n$ என்னும் கோணங்களை அமைக்கின்றன.



$\overline{OX}$ $\rightarrow X = P_1\cos\alpha_1, P_2\cos\alpha_2, P_3\cos\alpha_3 +$ ....$P_n\cos\alpha_n$

$\overline{OY}$ $\uparrow Y = P_1\sin\alpha_1, P_2\sin\alpha_2, P_3\sin\alpha_3 +$ ....$P_n\sin\alpha_n$



விளையுள் விசை R எனின்,

$R = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$

உதாரணம் 5

2N, $4\sqrt{3}$N, 8N, $2\sqrt{3}$N, 4N பருமனுடைய விசைகள் ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF இல் முறையே AB, AC, AD, AE, AF திசைகளிலே தாக்குகின்றது. இவற்றின் விளையுள் விசையைக் காண்க.

$B\hat{A}E = 90°$

AB, AE என்பவற்றை முறையே x, y அச்சுகள் என்க.

(a) Ox வழியே கூறாக்க.

$X = 2\sqrt{3}\cos 30 - 6\cos 60 - 2 + 3\sqrt{2}\cos 45$

$= 3 - 3 - 2 + 3 = 1$

Oy வழியே கூறாக்க.

$Y = 3 + 2\sqrt{3}\sin 30 + 6\sin 60 - 3\sqrt{2}\sin 45$

$= 3 + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 4\sqrt{3}$

$R^2 = X^2 + Y^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 49$

$R = 7N, \tan\alpha = 4\sqrt{3}$

(b) BA வழியே கூறாக்க.

$X = \sqrt{3} + 4\sin 60 - 6\cos 30$

$= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$

DC வழியே கூறாக்க.

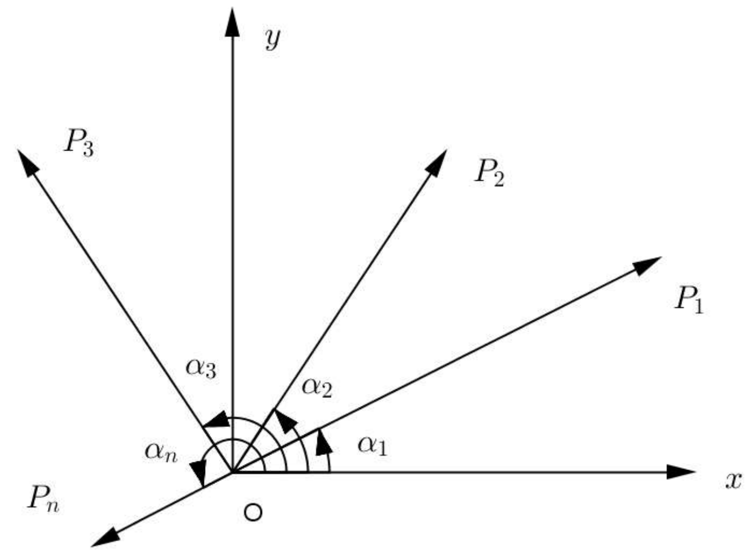
$Y = 5 - 4\cos 60 + 6\sin 30$

$= 5 - 2 + 3 = 6$

எனவே விளைவு DCவழியே தாக்கும் 6N ஆகும்.

2.5 ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் ஒருதள விசைகளின் சமநிலை

OX, OY என்பன இரு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுகள் என்க. தளம் XOY இல் ஒரு தள விசைகள் புள்ளி O வில் தாக்குகின்றன.



P_1, P_2, P_3, ...P_n என்னும் ஒரு தள விசைத்தொகுதிகள் புள்ளி O வில் தொழிற்படுகின்றன. P_1, P_2, P_3, ...P_n என்னும் விசைகள் OX - அச்சின் நேர்திசையுடன் α_1, α_2, α_3, ...α_n கோணங்களை அமைக்கின்றன.

OX - வழியே

$\rightarrow X = P_1\cos\alpha_1,\ P_2\cos\alpha_2,\ P_3\cos\alpha_3 + \ ....P_n\cos\alpha_n$

OY - வழியே

$\uparrow Y = P_1\sin\alpha_1, P_2\sin\alpha_2, P_3\sin\alpha_3 + ...P_n\sin\alpha_n$

$R = X^2 + Y^2$

துணிக்கையின் சமநிலைக்கு விளையுள் விசை R பூச்சியமாக வேண்டும்.

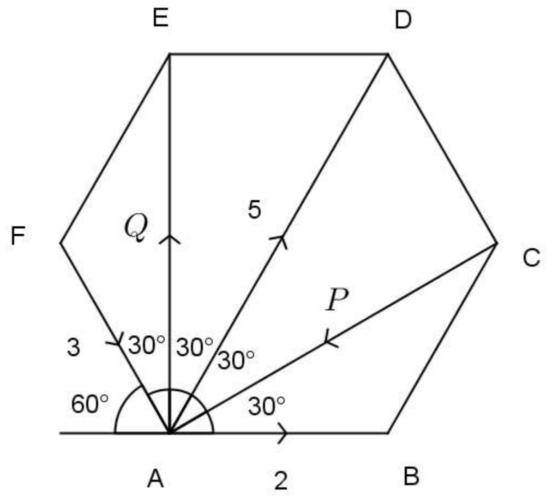
$R = 0 \qquad x = 0, y = 0 \qquad$ (இங்கு $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$) ஆகும்.

சமநிலைக்குத் தேவையானது இரு திசைகளிலான பிரித்த கூறுகள் பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

உதாரணம் 7

2N, PN, 5N, QN, 3N பருமன் விசைகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணியில் முறையே AB, CA, AD, AE, FA வழியே தாக்குகின்றதை தொகுதி சமநிலையில் இருப்பின் P, Q விசைகளைக் காண்க.

$$X = 2 - P\cos30 + 5\cos60 + 3\cos60$$
$$= 2 - \frac{\sqrt{3}P}{2} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$$
$$= 6 - \frac{\sqrt{3}P}{2}$$
$$Y = Q - P\sin30 + 5\sin60 - 3\sin60$$
$$= Q - \frac{P}{2} + \sqrt{3}$$



விசைத்தொகுதி சமநிலையில் இருப்பதால்,

$X = 0, \qquad Y = 0$

$X = 0 \Rightarrow 6 - \frac{P\sqrt{3}}{2} = 0; \quad P = \frac{12}{\sqrt{3}} \quad = 4\sqrt{3}\,N$

$Y = 0 \Rightarrow Q - \frac{P}{2} + \sqrt{3} = 0$

$Q - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$

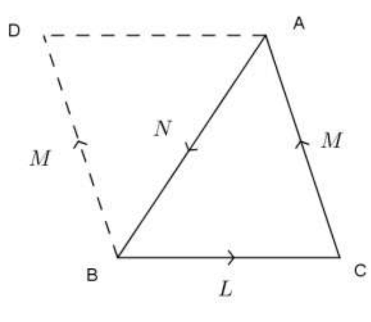
$Q = \sqrt{3}N$

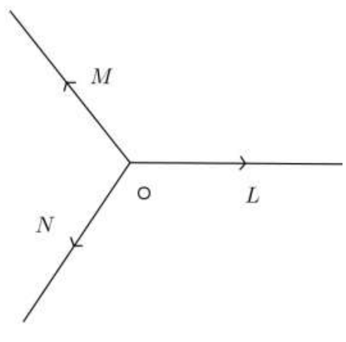
2.6 துணிக்கையொன்றில் தாக்கும் மூன்று ஒருதள விசைகள்

1. விசை முக்கோணி

துணிக்கை ஒன்றின் மீது தாக்கும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத மூன்று ஒரு தள விசைகள் பருமன், திசை பற்றி முக்கோணி ஒன்றில் ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களினால் வகை குறிக்கப்படலாம் எனின் அம்மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் காணப்படும்.

L, M, N என்ற மூன்று விசைகள் பருமனிலும் திசையிலும் முறையே BC, CA, AB என்பவற்றால் குறிக்கப்படுகின்றது. முக்கோணி ABC யின் வழியே முறையே குறிக்கப்படின் L, M, N என்பன சமநிலையில் இருக்கும்.





இணைகரம் BCAD ஐப் பூர்த்தியாக்குக.

BA = CA BA//CA

ஆகவே M ஆனது BD யினால் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படலாம்.

விசை இணைகர விதியைப் பிரயோகிக்க.

விசைகள் L, M என்பவற்றின் விளையுள் R $\overrightarrow{BA}$ இனால் தரப்படும்.

ஆகவே BA = N, விசை R இன் திசை N இன் திசைக்கு எதிரானதாகும்.

R = N, O வில் எதிர் திசைகளில் தாக்குகின்றன.

ஆகவே L, M, N சமநிலையில் இருக்கும்.

அல்லது

காவிக்கூட்டல் விதிப்படி

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

$$\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = 0$$

மூன்று விசைகளின் காவிக்கூட்டல் பூச்சியமாகும். ஆகவே புள்ளியில் தாக்கும் மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் இருக்கும்.

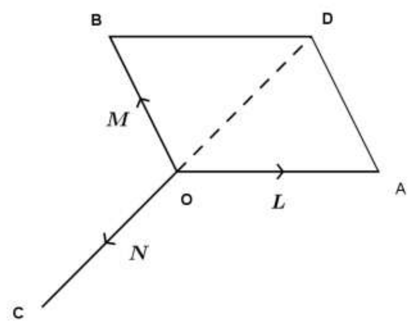
2. விசை முக்கோணியின் மறுதலை

மூன்று விசைகளின் கீழ் துணிக்கையொன்று சமநிலையில் இருப்பின் அம்மூன்று விசைகளும் முக்கோணி ஒன்றில் ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களினால் பருமன், திசை குறிக்கலாம்.

துணிக்கையொன்றில் தாக்கும் L, M, N விசைகள் என்க. அத்துடன் அவை சமநிலையில் உள்ளது.

L, M, N விசைகள் O வில் தாக்கு கின்றது. அவை முறையே OA, OB, OC என்ப வற்றால் குறிக்கப்படுகின்றது.

இணைகரம் OADB இனைப் பூர்த்தி யாக்குக.



இணைகர விதியைப் பிரயோகிக்க.

L, M என்னும் விசைகளின் விளையுள் R, OD இனால் குறிக்கப்படும்.

ஆனால் L, M, N என்பன சமநிலையில் உள்ளது.

ஆகவே விசை R, N என்பன சமநிலையில் உள்ளது.

ஆகவே R = N அத்துடன் திசைகள் எதிரானவை.

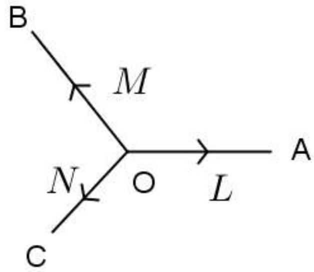
ஆகவே முக்கோணி OAD யில் L, M, N விசைகள் முறையே பருமனிலும் திசையிலும் OA, AD, DO என்பவற்றால் குறிக்கப்படும்.

ΔOAD

L	→	OA
M	→	AD
N	→	DO

3. இலாமியின் தேற்றம்

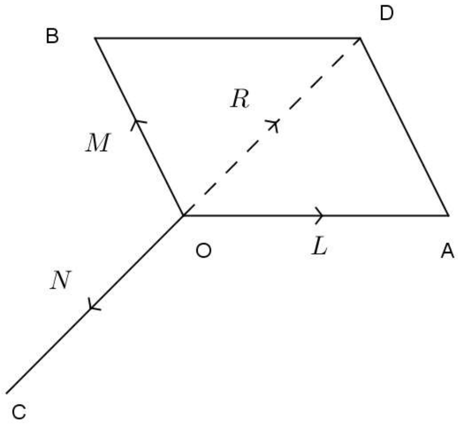
துணிக்கை ஒன்றின் மீது தாக்கும் மூன்று ஒர தள விசைகள் சமனிலையில் காணப்படும் எனின் ஒவ்வொரு விசையும் அடுத்த இரண்டு விசைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன் இற்கு விகித சமமானது.



L, M, N என்னும் விசைகள் சமநிலையில் இருப்பின்

$$\frac{L}{\sin B\hat{O}C} = \frac{M}{\sin C\hat{O}A} = \frac{N}{\sin A\hat{O}B}$$

இத்தேற்றத்தினைப் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.



முக்கோணிக்கு சைன் விதியை உபயோகிக்க.

L, M, N விசைகள் ΔAOD யின் பக்கங்களால் குறிக்கப்படலாம்.

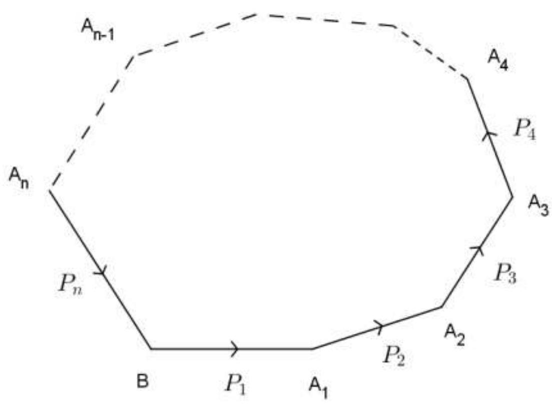
முக்கோணி AOD யில்,

$$\frac{OA}{\sin O\hat{D}A} = \frac{AD}{\sin D\hat{O}A} = \frac{DO}{\sin O\hat{O}D}$$

$$\frac{L}{\sin B\hat{O}C} = \frac{M}{\sin C\hat{O}A} = \frac{N}{\sin A\hat{O}B}$$

4. விசைப் பல்கோணி

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் எத்தொகை விசைகளும் ஓர் ஒழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட பல்கோணியின் பக்கங்களால் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படின் அவ்விசைகள் சமநிலையிலிருக்கும்.



பல்கோணி $BA_1A_2A_3$ ...... A_n இன் பக்கங்கள் BA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$ இனால் புள்ளி O வில் தாக்கும் விசைகள் P_1, P_2, P_3 .... P_n குறிக்கப்படுகின்றன.

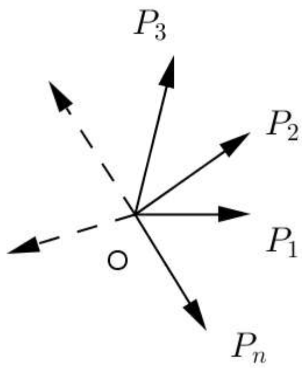
இவ் விசைகள் சமனிலையில் இருப்பின்,

$$\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{BA_2}$$

$$\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{BA_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{BA_3}$$

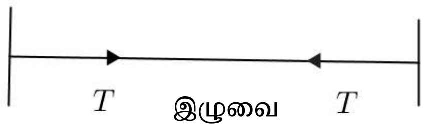
காவிக் கூட்டலின்படி

$$\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nB}=0$$



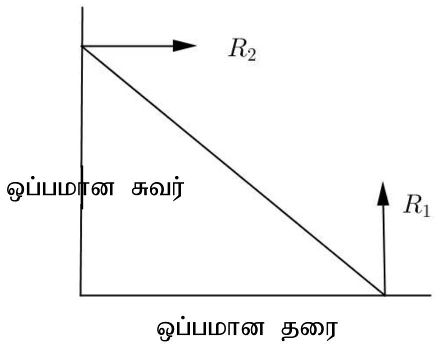
இழையொன்றின் இழுவை

இலேசான இழை என்பது தரப்பட்ட பிரசினத்தினத்தில் உள்ள திணிவுகளுடன் ஒப்பிடும்போது இழையின் திணிவு புறக்கணிக்கத்தக்கதாகும். இழையானது உடலினுள் செலுத்துகின்ற விசையானது இழுவை எனப்படும். இது இழையின் வழியே தாக்குகின்றது.



இலேசான இழையில் இழுவையானது அண்ணளவாக இழையின் வழியே சமனாகக் காணப்படும். பாரமான இழையில் இழுவையானது இழையின் புள்ளிக்கு புள்ளி வேறுபட்டதாகும்.

ஒப்பமான மேற்பரப்பு



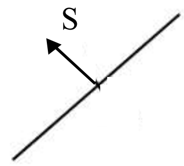
ஒப்பமான திண்மங்களுக்கு இடையே மறுதாக்கம் மட்டுமே காணப்படும். இம் மறுதாக்கம் பொது மேற்பரப்புக்குச் செங்குத்தாகக் காணப்படும்.

அதாவது இரண்டு ஒப்பமான உடல் களுக்கிடையான மறுதாக்கம் உடல் களின் இயங்கு திறனுக்குச் செங்குத் தான திசையில் காணப்படும்.

ஒப்பமான தரைக்கும் கோலுக்கிடை யான விசை R_1 ஆகும். இது ஒப்பமான தரைக்குச் செங்குத்தாகும்.

ஒப்பமான சுவருக்கும் கோலுக்குமிடையான விசை R_2 ஆகும். இது ஒப்பமான சுவருக்குச் செங்குத்தாகும். R_1, R_2 விசைகள் மறுதாக்கம் என அழைக்கப்படும்.

ஒப்பமான ஆப்பின்மீது ஓய்விலிருக்கும் கோலின் மீதான மறுதாக்கம் S கோலிற்குச் செங்குத்தாகக் காணப்படும்.



உதாரணம் 8

w நிறையுள்ள ஒரு துணிக்கை AB என்னும் இலேசான நீளா இழை மூலம் A என்னும் புள்ளியிலிருந்து நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகின்றது. துணிக்கைக்கு P என்னும் விசை கிடையாகப் பிரயோகிக்கப்பட A இனூடாக நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தில் ஓய்வடையும் எனின் P இன் பெறுமானத்தையும் இழையின் இழுவையையும் w_1, α என்பவற்றில் காண்க.

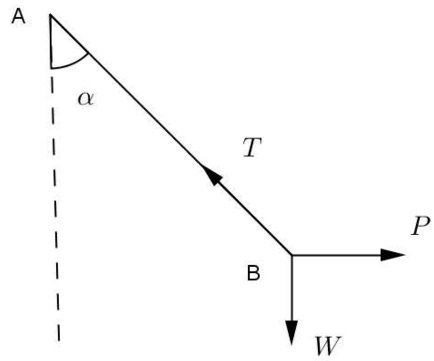
முறை I

துணிக்கையில் தாக்கும் விசைகள்

i. நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி நிறை w

ii. கிடையாக விசை P

iii. இழையின் வழியே இழுவை T



துணிக்கையின் சமநிலைக்கு

நிலைக்குத்தாக $\uparrow T\cos\alpha - w = 0$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{w}{\cos\alpha}$$

கிடையாக $\rightarrow P - T\sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow P = T\sin\alpha = w\tan\alpha$$

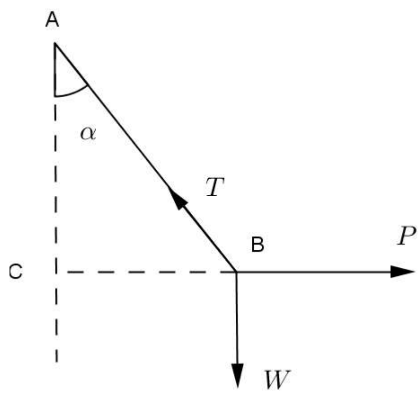
முறை II (விசை முக்கோணி)

மூன்று விசைகள் T, W, P துணிக்கையில் தொழிற்படுகின்றன. துணிக்கையின் சமநிலைக்கு ΔABC ஐக் கருதுக.

$$\frac{T}{BA} = \frac{W}{AC} = \frac{P}{CB}$$

$$\frac{T}{BA} = \frac{W}{AC}; \quad T = W\times\frac{BA}{AC} = \frac{W}{\cos\alpha}$$

$$\frac{W}{AC} = \frac{P}{CB}; \quad P = W\times\frac{CB}{AC} = W\tan\alpha$$

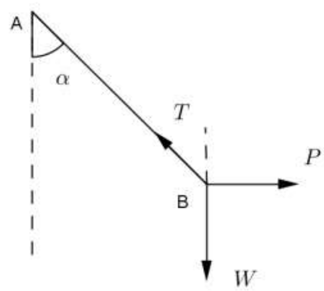


முறை III (இலாமியின் தேற்றம்)

$$\frac{T}{\sin 90} = \frac{W}{\sin(90+\alpha)} = \frac{P}{\sin(180-\alpha)}$$

$$\frac{T}{1} = \frac{W}{\cos\alpha} = \frac{P}{\sin\alpha}$$

$$T = \frac{W}{\cos\alpha}, \quad P = W\tan\alpha$$



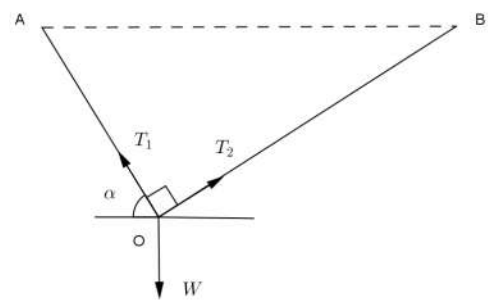
உதாரணம் 9

w நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று 50 cm, 120 cm நீளமுள்ள இரு இலேசான இழைகள் OA, OB என்பவற்றின் முனைகள் O இற்கு இணைக்கப்பட்டு இழையின் மறுமுனைகள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் 130 cm இடைத்தூரத்திலுள்ள A, B எனும் புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு இழையிலும் இழுவையைக் காண்க.

$OA^2 + OB^2 = 50^2 + 120^2 = 130^2 = AB^2$

ஆகவே $\angle AOB = 90°$

$\angle AOB = \alpha,\ \cos\alpha = \frac{5}{13},\ \sin\alpha = \frac{12}{13}$



முறை II (விசை முக்கோணி)

AC நிலைக்குத்து. நீட்டிய BO, C இல் சந்திக்கின்றது.

முக்கோணி OAC ஐக் கருதுக.

$T_1 \rightarrow OA$

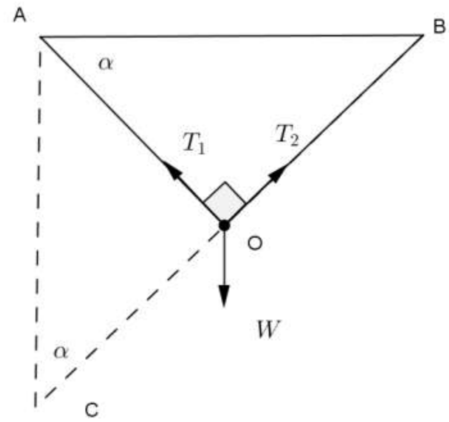
$w \rightarrow AC$

$T_2 \rightarrow CO$

$$\frac{T_1}{OA} = \frac{W}{AC} = \frac{T_2}{CO}$$

$$T_1 = W.\frac{OA}{AC} = W\sin\alpha = \frac{12W}{13}$$

$$T_2 = W.\frac{OC}{AC} = W\cos\alpha = \frac{5W}{13}$$



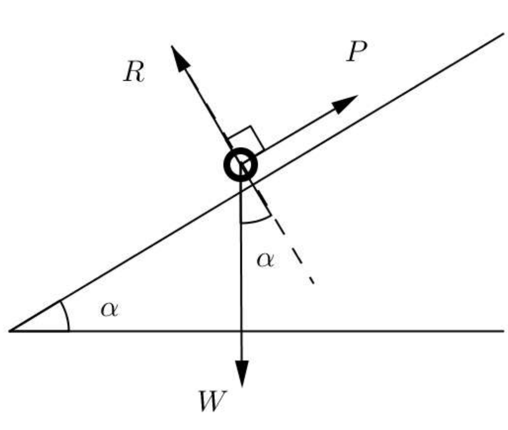
உதாரணம் 10

w நிறையுடைய துணிக்கை கிடையுடன் α கோணத்தில் அமைந்துள்ள ஒப்பமான தரையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையின் சமநிலைக்கு,

i. தரைக்கு மேன்நோக்கி

ii. தரைக்குக் கிடையான

விசைகளின் பருமன்களைக் காண்க.

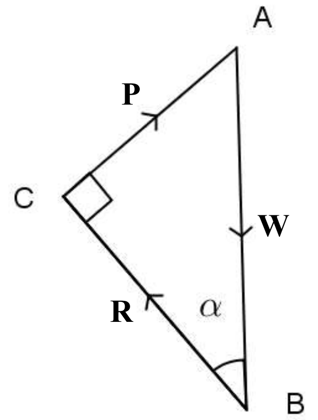


துணிக்கையில் தாக்கும் விசைகள்

i. நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி நிறை w

ii. தரைக்குச் செங்குத்தாக மறுதாக்கம் R

iii. தரையின் வழியே P



முறை I

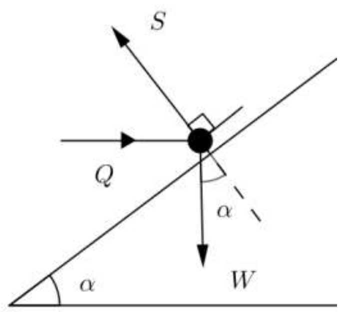
துணிக்கையின் சமநிலைக்கு

தளத்தின் வழியே

$$P - w\sin\alpha = 0$$
$$P = w\sin\alpha$$

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக

$$P - w\sin\alpha = 0$$
$$R = w\cos\alpha$$



முறை II (விசை முக்கோணி)

முக்கோணி ABC ஐக் கருதுக.

$W \rightarrow AB$

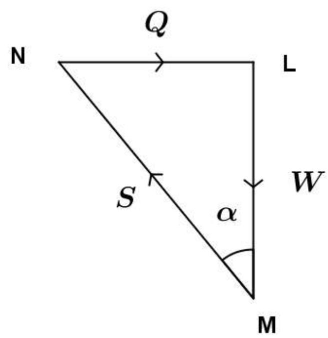
$R \rightarrow BC$

$P \rightarrow CA$

$$\frac{W}{AB} = \frac{R}{BC} = \frac{P}{CA}$$

$$R = W.\frac{BC}{AB} = W\cos\alpha$$

$$P = W.\frac{CA}{AB} = W\sin\alpha$$



2.7 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 11

w நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று, அதற்கு இணைக்கப்பட்ட இரு இழைகளினால் தாங்கப்படுகின்றது. ஓர் இழை நிலைக்குத்துடன் α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ இனை அமைக்கின்றது. மற்றைய இழையிலுள்ள இழுவை மிகக் குறைவாக இருப்பதற்கு அவ்விழையின் திசையைக் காண்க. இச் சந்தர்ப்பத்தில் இரு இழைகளிலுமுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

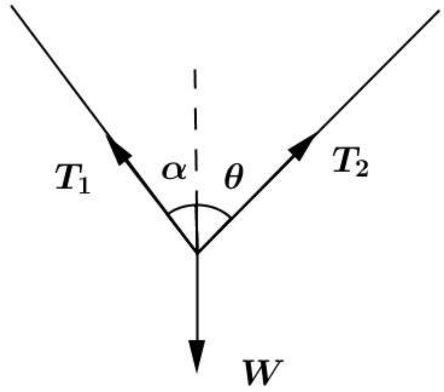
துணிக்கையில் தொழிற்படும் விசைகள்

i. நிலைக்குத்தாக கீழ்நோக்கி துணிக்கையின் நிறை w

ii. நிலைக்குத்துடன் α கோணம் அமைக்கும் இழையின் வழியே இழுவை T_1

iii. நிலைக்குத்துடன் θ கோணம் அமைக்கும். இழையின் வழியே இழுவை T_2

(இழுவை T_2 ஆனது துணிக்கை யின் சமநிலைக்கான மிகக் குறைவான பெறுமானம்)



முறை I (விசை முக்கோணி)

முதலில் AB என்கின்ற கோட்டை நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி w நிறையைக் குறிக்குமாறு வரைதல் வேண்டும். நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தை அமைக்குமாறு BL என்கின்ற கோட்டை இழுவை T_1 குறிக்குமாறு அமைத்தல். மிகக்குறைவான இழுவை T_2 குறிக்குமாறு AC ஐ BL க்குச் செங்குத்தாகுமாறு அமைக்க. இப்பொறு CA ஆனது T_2 இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் குறிக்கும்.

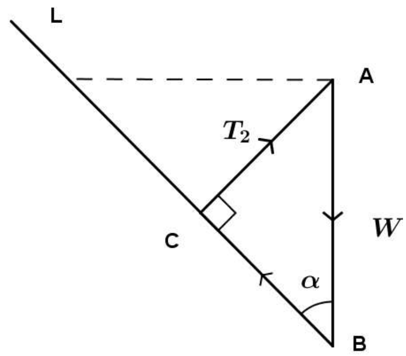
$W \rightarrow AB$

$T_1 \rightarrow BC$

$T_2 \rightarrow CA$

$$\frac{W}{AB} = \frac{T_1}{BC} = \frac{T_2}{CA}$$

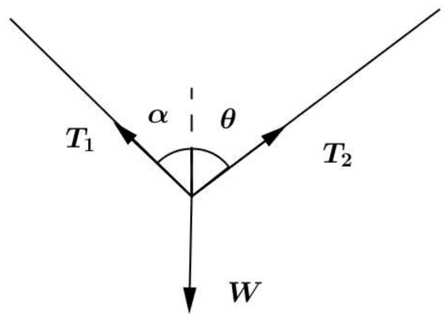
$T_1 = W\cos\alpha$
$T_2 = W\sin\alpha$



முறை II (விசை முக்கோணி)

$$\frac{W}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{T_1}{\sin(180-\theta)} = \frac{T_2}{\sin(180-\alpha)}$$

$$T_1 = \frac{W\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta)} \qquad T_2 = \frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$$



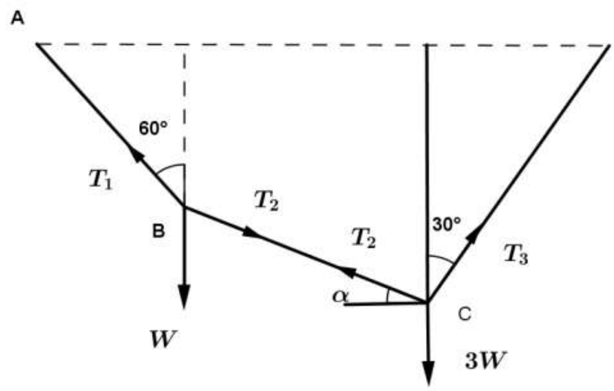
உதாரணம் 12

ABCD எனும் இலேசான நீளா இழை A, D என்னும் ஒரே கிடையான இரு நிலைத்த புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு, w, 3w நிறைகள் முறையே B யிலும் C யிலும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB, CD ஆகியன நிலைக்குத்துடன் முறையே $60°, 30°$ கோணங்களை அமைக்கின்றன. BC கிடையானது எனக் காட்டி இழைகள் AB, BC, CD என்பவற்றில் இழுவைகளைக் காண்க.

BC ஆனது கிடையுடன் α கோணம் அமைக்கின்றது என்க.

B யின் சமநிலைக்கு

இலாமியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்க.



BC ஆனது கிடையுடன் α கோணத்தை அமைக்கின்றது என்க.

B இன் சமநிலைக்கு,

இலாமியின் தேற்றத்தை உபயோகிக்க.

$$\frac{T_2}{\sin 120} = \frac{T_1}{\sin(90-\alpha)} = \frac{W}{\sin(150+\alpha)}$$

$$\frac{T_2}{\sin 60} = \frac{T_1}{\cos\alpha} = \frac{W}{\sin(30-\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots (1)$$

C இன் சமநிலைக்கு,

$$\frac{T_2}{\sin 150} = \frac{T_3}{\sin(90+\alpha)} = \frac{3W}{\sin(120-\alpha)}$$

$$\frac{T_2}{\sin 30} = \frac{T_3}{\cos\alpha} = \frac{3W}{\sin(60+\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

From (1) and (2),

$$T_2 = \frac{W\sin 60}{\sin(30-\alpha)} = \frac{3W\sin 30}{\sin(60+\alpha)}$$

$$\sin 60.\sin(60+\alpha) = 3\sin 30.\sin(30-\alpha)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right]$$

$$\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha - 3\sin\alpha$$

$$4\sin\alpha = 0 \quad \sin\alpha = 0 \quad \alpha = 0$$

ஏனென்றால் BC கிடையாகும்.

(1) இலிருந்து $T_1 = \frac{W}{\sin 30} = 2W$

(1) இலிருந்து $T_2 = \frac{W\sin 60}{\sin 30} = \sqrt{3}\,W$

(2) இலிருந்து $T_3 = \frac{3W}{\sin 60} = 2\sqrt{3}$

உதாரணம் 13

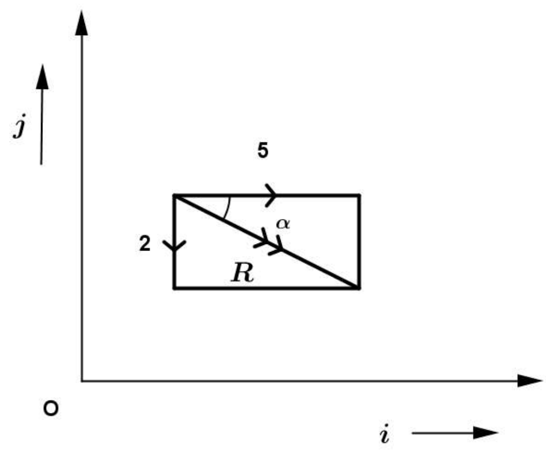
a) $F_1 = 4\underline{i} + 2\underline{j}$, $F_2 = 2\underline{i} - 5\underline{j}$, $F_3 = -\underline{i} + \underline{j}$ என்னும் விசைகள் ஒரு புள்ளியில் தாக்குகின்றது. இம்மூன்று விசைகளின் விளையுள் விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

b) A, B, C என்னும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகள் A(2, 3), B(5, 7), C(-3, 15) ஆகும்.

i. காவிகள் $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ என்பவற்றை $\underline{i}, \underline{j}$ இல் காண்க.

ii. விசைகள் $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ என்பவற்றின் பருமன்கள் முறையே 20 N, 65 N புள்ளி A யில் முறையே AB, AC வழியே தாக்குகின்றன. இவ் விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

(OX, OY அச்சு வழியான அலகு காவிகள் முறையே $\underline{i}, \underline{j}$ ஆகும்.)



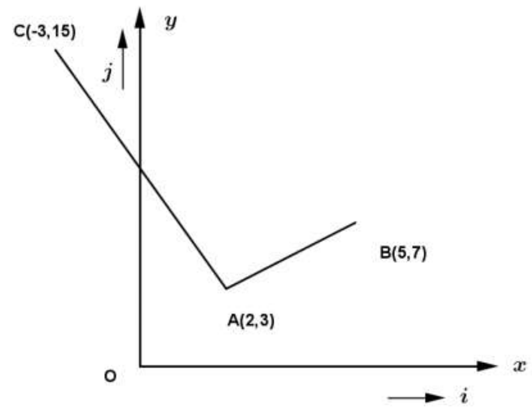
(a) $\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$

$$= (4\underline{i} + 2\underline{j}) + (2\underline{i} - 5\underline{j}) + (-\underline{i} + \underline{j})$$

$$= 5\underline{i} - 2\underline{j}$$

$|\underline{R}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$\tan\alpha = \frac{2}{5}$, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$



(b) $A \equiv (2, 3)$, $B \equiv (5, 7)$, $C \equiv (-3, 15)$

$\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} + 3\underline{j}$, $\overrightarrow{OB} = 5\underline{i} + 7\underline{j}$,

$\overrightarrow{OC} = -3\underline{i} + 15\underline{j}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

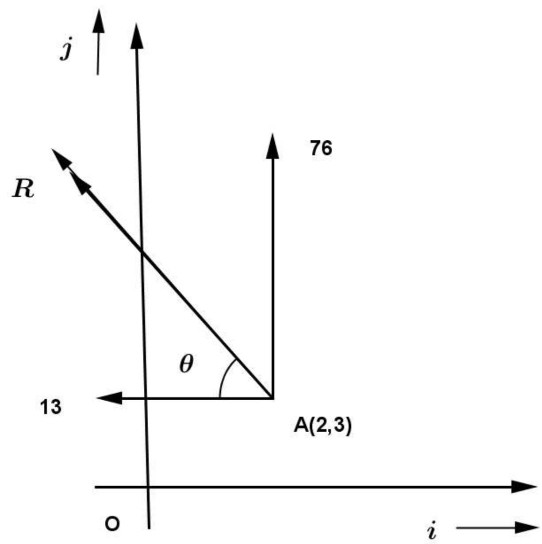
$$= (5\underline{i} + 7\underline{j}) - (2\underline{i} + 3\underline{j})$$

$$= 3\underline{i} + 4\underline{j}$$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$$= (-3\underline{i} + 15\underline{j}) - (2\underline{i} + 3\underline{j})$$

$$= 5\underline{i} + 12\underline{j}$$



2.8 பயிற்சி

1. P, Q என்னும் இரு விசைகள் புள்ளியொன்றில் θ கோண இடைவெளியில் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளையுள் R. P, R என்பவற்றுக்கிடையான கோணம் α என்பவற்றைக் காண்க.

   a) $P = 6, Q = 8, \theta = 90^\circ$ எனின் R, α என்பவற்றைக் காண்க.

   b) $P = 10, Q = 8, \theta = 60^\circ$ எனின் R, α என்பவற்றைக் காண்க.

   c) $P = 15, Q = 15\sqrt{2}, \theta = 135^\circ$ எனின் R, α என்பவற்றைக் காண்க.

   d) $P = 8, Q = 7, \theta = 120^\circ$ எனின் Q, α என்பவற்றைக் காண்க.

   e) $P = 7, Q = 15, \theta = 60^\circ$ எனின் Q, α என்பவற்றைக் காண்க.

2. துணிக்கையொன்றில் $F, 2F$ என்ற இரு விசைகள் தாக்குகின்றன. விளையுள் விசை F இற்கு செங்குத்தானது. எனின் இரு விசைகளுக்கிடையான கோணத்தைக் காண்க.

3. $P, 2P$ N விசைகள் துணிக்கையொன்றில் தாக்குகின்றன. முதலாவது இரட்டிப்பாகவும் இரண்டாவது 10 N ஆல் அதிகரிக்கப்பட்ட போதும் புதிய விளையுளின் திசை மாறவில்லை எனின் P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. P, Q என்னும் இரு விசைகள் θ கோணத்தில் தாக்குகின்றன. $\theta = 60^\circ$ ஆகும்போது விளையுள் $\sqrt{57}$ N, $\theta = 90^\circ$ ஆகும்போது விளையுள் $5\sqrt{2}$ N எனின் P, Q வைக் காண்க.

5. இரு சமவிசைகள் 2θ வில் தாக்கும்போது உள்ள விளையுள் விசையானது அவை 2α வில் தாக்கும் உள்ள விளையுள் விசையின் இருமடங்காகும் எனின் $\cos\theta = 2\cos\alpha$ எனக் காட்டுக.

6. P, Q என்னும் இரு விசைகள் θ கோணத்தில் தாக்கும்போது விளையுளின் பருமன் P இன் பருமனுக்குச் சமனாகும். இப்பொழுது P யின் பருமன் இரட்டிப்பாகும் போதும் விளையுளின் பருமன் P யின் பருமனுக்குச் சமனாகும். Q வை P யின் சார்பிலும் θ இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

7. $P, P, \sqrt{3}P$ என்னும் விசைகள் துணிக்கையொன்றில் தாக்கி சமநிலையில் உள்ளது. இவ் விசைகளுக்கிடையான கோணங்களைக் காண்க.

8. P, Q என்னும் இரு விசைகளின் விளையுள் $\sqrt{3}Q$ அத்துடன் P யுடன் 30° கோணத்தை ஆக்குகின்றது எனின், $P = Q$ அல்லது $P = 2Q$ எனக் காட்டுக.

9. ABCD ஓர் சதுரம். P, $2\sqrt{2}$ P , 2P விசைகள் முறையே A இல் AB, AC, AD வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

10. ABCD ஓர் சதுரம். AB = 3 m, BC = 5m ஆகும். 6, 10, 12 நியூற்றன் விசைகள் A இல் முறையே AB, AC, AD வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

11. ABCDEF ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $2\sqrt{3}$, 4, $8\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{3}$ நியூட்டன் விசைகள் முறையே B இல் BC, BD, EB, BF, AB எழுத்துகளின் வரிசையில் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனைக் காண்க.

12. ABCD ஓர் சதுரம். பக்கங்கள் BC, CD இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, F ஆகும். 5, $2\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$, 1 நியூட்டன் விசைகள் A இல் முறையே AB, AE, CA, AF, AB வழியே எழுத்துகளின் வரிசையில் தாக்குகின்றன. விளையுளைக் காண்க.

13. ABCD பக்க நீளம் 4 cm ஆகவுள்ள சதுரமாகும். பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA என்பவற்றில் முறையே புள்ளிகள் E, F, G, H, J என்பன AE = BF = CG = HD = DJ = 1 cm ஆகுமாறு உள்ளன. (இங்கு CD க்கு இடையில் G, H என்பன CG = 1 cm, GH = 2 cm ஆகுமாறு உள்ளன.) 10, $3\sqrt{10}$, $2\sqrt{5}$, 10, $\sqrt{10}$, 5 நியூட்டன் விசைகள் புள்ளி E இல் முறையே EB, EF, EG, EH, EJ, EA வழியே தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனைக் காண்க.

14. இரு சமபக்க முக்கோணி ABC மையப்போலி G ஆகும். 10, 10, 20 நியூட்டன் விசைகள் S இல் முறையே GA, GB, GC வழியே தாக்குகின்றன. விளையுள் விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

15. 50 N நிறையுடைய துணிக்கை ஒன்று 60 cm, 80 cm நீளமுள்ள இரு இழைகளில் தொங்குகின்றன. இரு புள்ளிகளுக்கிடையான கிடைத்தூரம் 100 cm ஆகும். இழைகளில் உள்ள இழுவையைக் காண்க.

16. கிடையுடன் சாய்வு α ஆகவுள்ள ஒப்பமான தளத்தில் 100 N நிறையுடைய துணிக்கை வைக்கப்பட்டுள்ளது. துணிக்கை சமநிலையில் இருக்க.

    a) தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக

    b) கிடையாகப் பிரயோகிக்க வேண்டிய விசை யாது?

17. 30 N நிறையுடைய துணிக்கையொன்று 35 cm, 50 cm நீளமுள்ள இழைகள், இழைகளின் முனைகள் A, B கிடைக்கோட்டில் 60 cm இடைத்தூரத்தில் உள்ளன. ஒவ்வொரு இழையிலுள்ள இழுவைகளைக் காண்க.

18. 120 cm நீளமான இழையொன்றின் முனைகள் கிடைக்கோட்டில் 60 cm இடைத்தூரத்தில் முனைகள் A, B இல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. 50 N நிறையுடைய வளையமொன்று இழையில் தொங்கவிடப்பட்டு கிடைவிசை F இன் மூலம் B க்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது. இழையின் இழுவையும் F இன் பருமனையும் காண்க.

19. ஒரே மட்டத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ள இழையொன்றின் மீது w N நிறையுடைய ஒப்பமான வளையம் கிடைவிசை F இன் மூலம் சமநிலையில் உள்ளது. இதன்போது இழைகள் நிலைக்குத்துடன் $60^\circ, 30^\circ$ அமைக்கின்றது. இழைகளில் உள்ள இழுவையையும் F இன் பருமனையும் காண்க.

20. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அச்சுகள் OX, OY வழியான அலகுக்காவிகள் முறையே $\underline{i}, \underline{j}$ என்க.

    a) $\underline{F}_1 = 3\underline{i} + 5\underline{j}$, $\underline{F}_2 = -2\underline{i} + \underline{j}$, $\underline{F}_3 = 3\underline{i} - \underline{j}$ என்னும் விசைகள் துணிக்கையொன்றில் தாக்குகின்றன. இவ் விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

    b) $R_1 = 2P\underline{i} + P\underline{j}$, $R_2 = -4\underline{i} + 3P\underline{j}$, $R_3 = 2Q\underline{i} - 5\underline{j}$ என்னும் விசைகள் துணிக்கையொன்றில் தாக்கி துணிக்கை சமநிலையில் உள்ளது. P, Q என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

    c) இரு புள்ளிகள் A, B என்பவற்றின் ஆள்கூறுகள் முறையே (3, 4), (-1, 1) ஆகும். புள்ளி O வில் 2, 3, 5, $6\sqrt{2}$ விசைகள் முறையே OX, OY, OA, OB வழியே தாக்குகின்றன. ஒவ்வொரு விசைகளையும் $X\underline{i} + Y\underline{j}$ என்ற வடிவில் தருக. நான்கு விசைகளின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் கணிக்க.

21. தெக்காட்டின் தளத்தின் OX, OY அச்சு வழியான அலகுக் காவிகள் $\underline{i}, \underline{j}$ என்க. துணிக்கையொன்றின் மீது $4\underline{i} + 3\underline{j}$, $-3\underline{i} -4\underline{j}$ இற்குச் சமாந்தரமான விசைகள் முறையே P, Q என்பன தாக்குகின்றன. இவ்விரு விசைகளின் விளையுள் $\underline{i}$ இன் வழியே 7 N ஆகும். P, Q என்பவற்றின் பருமனைக் கணிக்க.

3.0 சமாந்தர விசைகள், திருப்பம், இணை

3.1 சமாந்தர விசைகள்

பகுதி (பாடம்) இரண்டில் புள்ளியொன்றில் தாக்கும் விசைகளின் விளையுளைப் பார்த்தோம். இப்பாடத்தில் (பகுதியில்) நாம் சமாந்தர விசைகளின் விளையுளை பற்றிப் பார்ப்போம்.

சமாந்தர விசைகளின் இரண்டு வகைகள்

i. ஒத்த சமாந்தர விசைகள்

இரு சமாந்தர விசைகள் ஒரே திசையிற் செயற்படின் அவை (நிகர்த்த) ஒத்த சமாந்தர விசைகள் எனப்படும்.

ii. ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள்

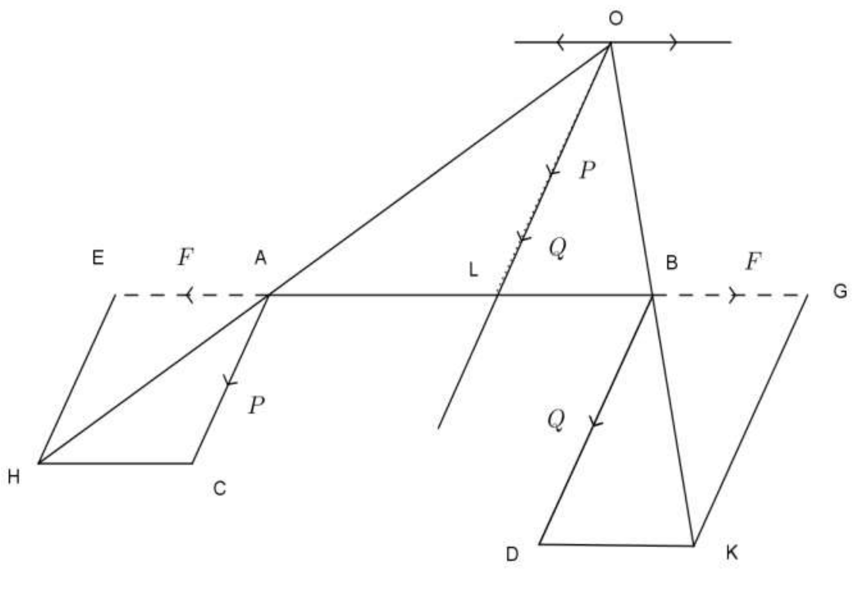
இரு சமாந்தர விசைகள் முரண் திசையிற் செயற்படின் அவை (நிகராத) ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள் எனப்படும்.

இங்கு சமாந்தர விசைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்காது. எனவே நேரடியாக விசை இணைகர விதிமூலம் விளையுளைக் காண்பது சாத்தியமற்றது.

இரு ஒத்த சமாந்தர விசைகளின் விளையுள்

A, B எனும் புள்ளிகளில் P, Q என்கின்ற விசைகள் முறையே AC, BD வழியே தாக்குகின்றன.

A, B என்னும் புள்ளிகளில் இரண்டு சமமான எதிரான விசைகள் F AB வழியே முறையே AE, BG வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைகள் தம்முள் சமப்படுவதால் P,Q வில் எவ்விதமாற்றமும் ஏற்படுத்தப்போதில்லை.



இணைகரங்கள் AEHC, BDKG என்பவற்றைப் பூர்த்தியாக்கி முறை அவற்றின் மூலை விட்டங்கள் HA, KB என்பவற்றை புள்ளி O இல் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

AC (அல்லது BD) க்கு சமாந்தரமாக OL ஐ வரைக. அது AB ஐ L இல் சந்திக்கின்றது.

இங்கு புள்ளி A இல் P,F இன் விளையுள் AH இனாலும் புள்ளி B இல் Q,F இன் BK இனாலும் தரப்படுகின்றது. இவை முறையே புள்ளி O விலே OAH, OBK வழியேும் தாக்கலாம்.

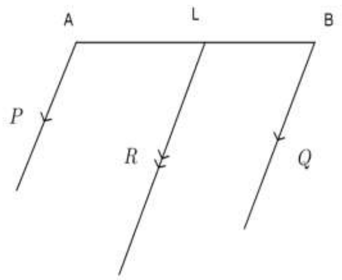
விசை P யானது OL வழியேயும் விசை F, AE க்கு சமாந்தரமாகவும் அத்துடன் விசை Q வானது OL வழியேயும் விசை F, BG க்கு சமாந்தரமாகவும் காணப்படுகின்றது. சமமானது எதிரானதுமான விசை F புள்ளி O வில் சமப்படுத்தப்படுகின்றது. எனவே விசைகள் P,Q வின் விளையுள் P+Q ஆகும். இது OL இன் திசைக்குச் சமாந்தரமாகும்.

$\Delta OLA \;///\; \Delta ACH$

$$\frac{OL}{LA} = \frac{AC}{CH} = \frac{P}{F} \quad \text{..} ①$$

$\Delta OLB \;///\; \Delta BDK$

$$\frac{OL}{LB} = \frac{BD}{DR} = \frac{Q}{F} \quad \text{...} ②$$



① , ② இலிருந்து $OL \times F = P \times LA = Q \times LB$

$$\frac{LA}{LB} = \frac{Q}{P}$$

அதாவது புள்ளி L விசைகளை உட்புறமாகப் பிரிக்கும் விகிதம்

$P . AL = Q.BL$ விளையுள் $R = P + Q$ வும் ஆகும்.

குறிப்பு: $P = Q$, எனின் விளையுள் R AB யின் நடுப்புள்ளியில் இருக்கும்.

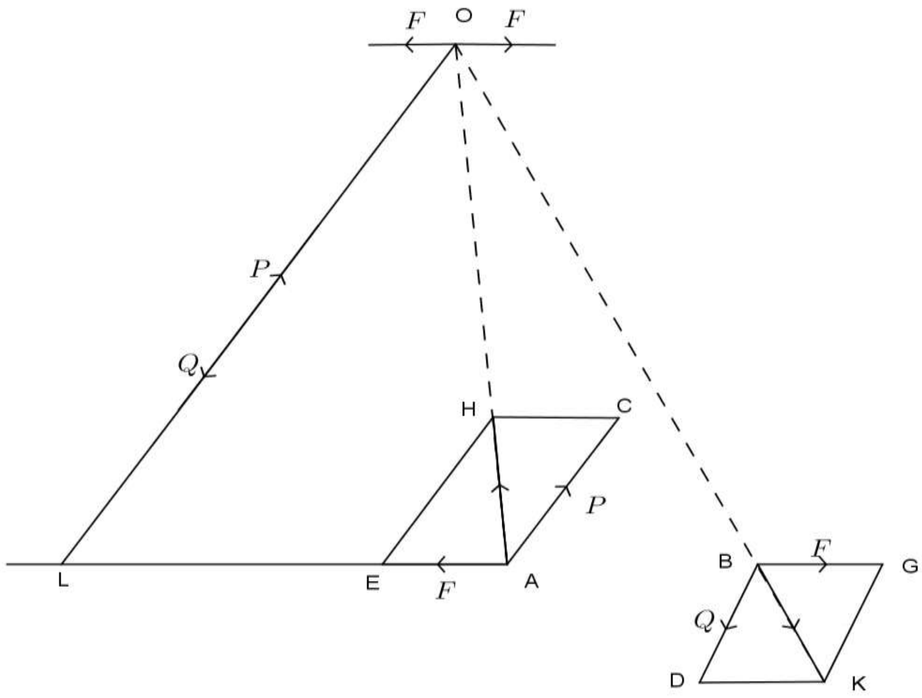
வகை (ii)

இரு ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகளின் விளையுள்

புள்ளிகள் A,B யில் P,Q எனும் ஒவ்வா சமாந்தர விசைகள் முறையே AC, BD வழியே தாக்குகின்றன.

கோடு AB யில் புள்ளி A இல் AE வழியே F என்ற விசையும் சேர்க்க. இணைகரங்கள் AEHC, BGKD இனைப் பூர்த்தியாக்கி அவற்றின் மூலை விட்டங்கள் AH, KB என்பவை O வில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக. (அவை இரண்டும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும். இல்லாவிடில் அவற்றின் பருமன்கள் P=Q ஆக வேண்டும்)

CA (அல்லது BD) க்கு சமாந்தரமாக OL ஐ வரைக. அது நீட்டிய BA ஐ சந்திக்கும் புள்ளி L என்க.



புள்ளி A யில் P,F இன் விளையுள் AH இனாலும் புள்ளி B யில் Q,F இன் விளையுள் BK இனாலும் இவை முறையே புள்ளி O வில் AO, OB இனாலும் தரப்படலாம். புள்ளி O விலே விசை P, LO வழியேயும் விசை F, AE இற்கு சமாந்தரமாகவும் விசை Q, OL வழியேயும் விசை F, BG இற்கு சமாந்தரமாகவும் தரப்படுகின்றது. விசை F ஆனது சமனும் எதிரானதாகவும் உள்ளதால் சமப்படுத்தப்படும். எனவே தனி விசைகள் P,Q இன் சமப்படுத்தப்படும். எனவே தனி விசைகள் P,Q இன் விளையுள் (P-Q) ஆகவும் LO இற்கு சமாந்தரமாகவும் காணப்படும்.

$\Delta\ OLA\ ///\ HEA$

$$\frac{OL}{LA} = \frac{HE}{EA} = \frac{P}{F} \qquad \text{..................................} \ ①$$

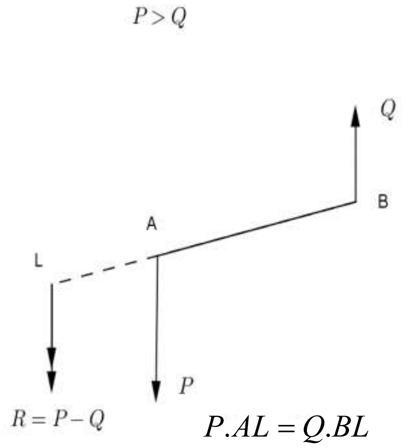
$\Delta\ OLA\ ///\ BDK$

$$\frac{OL}{LB} = \frac{Q}{F} \quad = \qquad \text{..................................} \ ②$$

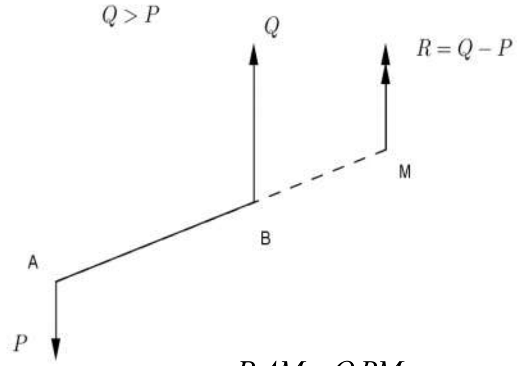
①, ② இருந்து $\dfrac{LA}{LB} = \dfrac{Q}{P}$

அதாவது புள்ளி L ஆனது AB யை வெளிப்புறமாக LA.P = LB.Q ஆகவும் விளையுள் R=P-Q வும் ஆகும்.

குறிப்பு : P=Q ஆகும் போது முக்கோணிகள் AEH, BKG என்பன ஒருங்கிசையும். எனவே, நீட்டப்பட்ட மூலை விட்டங்கள் AH, KB என்பன O வில் சந்திக்காது. எனவே அமைப்பைப் பூரணமாக்க முடியாது. சமமான ஒவ்வாத சமாந்தார விசைகளைத் தனி விசையாக்க முடியாது. இதுபற்றி இணையில் பின்னர் பார்ப்போம்.



$P.AL = Q.BL$



$P.AM = Q.BM$

யாதும் எண்ணிக்கையான சமாந்தர விசைகளின் விளையுள்

(i) விசைகள் நிகர்த்த சமாந்தர விசைகளாயின்

தொடர்ச்சியாக யாதுமிரு நிகர்த்த, சமாந்தர விசைகளின் விளையுவினை விசைகளின் இறுதி வரை காண்பதன் மூலம் விளையுள் காணப்படும்.

விளையுளானது எல்லா விசைகளினதும் கூட்டுத்தொகையாக இருப்பதுடன் அதன் திசையானது தரப்பட்ட விசைகளின் திசையிலும் இருக்கும்.

(ii) விசைகள் நிகராத சமாந்தார விசைகளாயின் விசைகளை நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள், நிகராத சமாந்த விசைகள் என இரு தொகுதிகளாகப் பிரித்து அவை ஒவ்வொன்றினதும் விளைவுகளைக் கண்டு கீழ் உள்ளவாறு விளையுள் காணப்படும்.

a) இவ்விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமன் அல்லாதவையாயின் விளையுவானது தனிவிசையாக இருப்பதுடன் அதன் பருமன் இவ்விசைகளின் அட்சரக்கணித கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாக இருக்கும்.

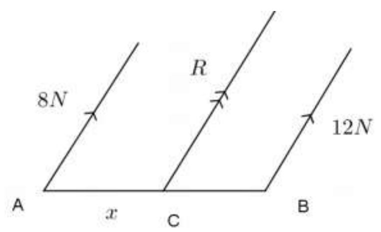
b) (i) இவை சமனானயின் தாக்கக்கோடுகள் ஒன்றுடனொன்று பொருந்துவனவாக இருப்பின் விளையுள் 0 ஆவதுடன் தரப்பட்ட விசைகள் சமனிலையில் இருக்கும்.

(ii) இவை சமனாகவும் இவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் ஒரு நேர்கோட்டில் இல்லாதும் இருப்பின் இவை ஒரு இணைக்கு ஒடுங்கும்.

3.2 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 1

- புள்ளிகள் A,B யில் ஒத்த சமாந்தர விசைகள் 8N, 12N தாக்குகின்றன. இங்கு $AB = 15\,\text{cm}$
  - a. விளையுளின் பருமனையும் AB யை வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.
  - b. விசைகள் ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள் எனின், விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் நிலையைக் காண்க.



$R = P+Q = 8+12 = 20N$

$8.AC = 12.BC$

$8x = 12(15-x)$

$20\,x = 12 \times 15$

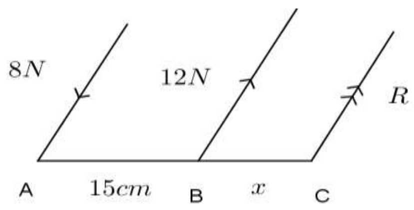
$AB = 9$ cm

(b) $R = 12-8 = 4N$

$12x = (15+x)8$

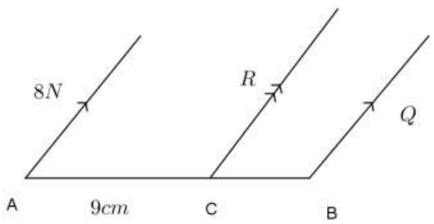
$4x = 15 \times 8$

$x = 30$ cm



உதாரணம் 2

- புள்ளிகள் A,B யில் சமாந்தர விசைகள் P,Q தாக்குகின்றன. இவற்றின் விளையுள் R AB ஐ C யில் சந்திக்கின்றது.
  - i. P, Q ஒத்த சமாந்தர விசைகள், P = 8 N, R = 17 N, AC = 9 cm எனின், Q, AB ஐக் காண்க.
  - ii. P, Q ஒவ்வாத சமாந்தர விசைகள், P = 6N , AC = 18 cm , CB = 16 cm எனின், Q, R என்பவற்றைக் காண்க.



$P + Q = 17$

$Q = 17 - 8$

$= 9$ N

$AC:CB = 9:8$

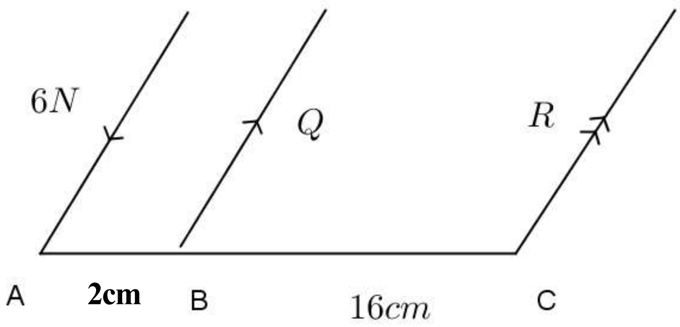
$6 \times 18 = Q \times 16$

$Q = \dfrac{27}{4}$

$R = Q-P$

$R = \dfrac{27}{4} - 6$

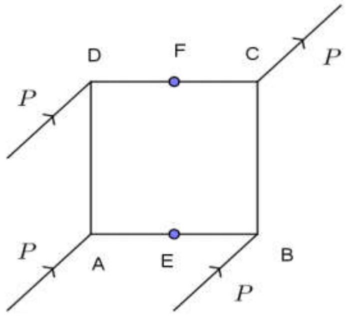
$R = \dfrac{3}{4}$



உதாரணம் 3

- நான்கு சமமான ஒத்த சமாந்தர விசைகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுள் சதுரத்தின் நடுப்புள்ளியின் ஊடாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

  புள்ளி A, B யில் உள்ள விசைகள் P களின் விசையுள் 2P பக்கம் AB யின் நடுப்புள்ளியில் தாக்கும். அப்புள்ளியை E என்க. அதேபோல் புள்ளி C,D யில் உள்ள விசைகள் களின் விளையுள் 2P பக்க CD யின் நடுப்புள்ளி F இல் தாக்கும்.



  இப்போது இரு ஒத்த சமாந்தர விசைகள் புள்ளி E,F இல் 2PN பருமனுடன் தாக்குகின்றன இவற்றின் விளையுள் 4P EF இன் நடுப்புள்ளியில் தாக்கும்.

  இந்நடுப்புள்ளி சதுரத்தின் மையமாகும்.

உதாரணம் 4

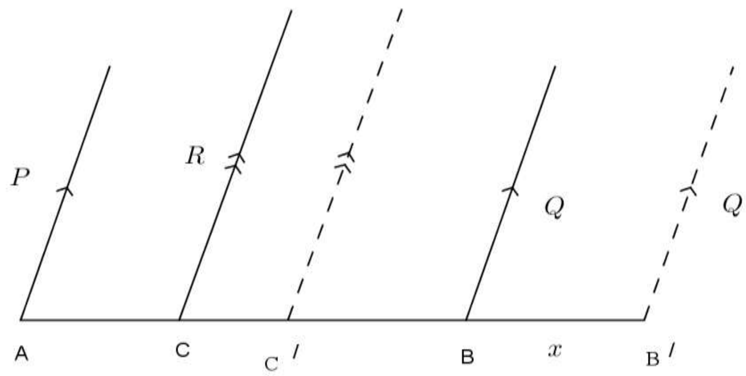
- P,Q என்பன ஒத்த சமாந்தர விசைகள். விசை Q வானது சமாந்தரமாக x தூரம் நகர்த்தப்பட்டால் P,Q இன் விளையுளானது குறிப்பிட்ட தூரத்தால் நகரும் எனக்காட்டுக.

  A,B புள்ளிகளில் தாக்கும் விசைகள் P,Q இன் விளையுள் R ஆனது AB கோட்டில் புள்ளி C யில் தாக்குகின்றது என்க.

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{Q}{P+Q}$$

$$AC = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)AB$$



இப்போது விசை Q வானது x தூரம் நகர்ந்தது என்க. புதிய விளையுள் AB யின் மீது புள்ளி C தாக்குகின்றது என்க.

$$\frac{AC^{/}}{C^{/}B^{/}} = \frac{Q}{P}$$

$$AC^{/} = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)AB^{/} = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)(AB+x)$$

விளையுள் நகர்ந்த தூரம்.

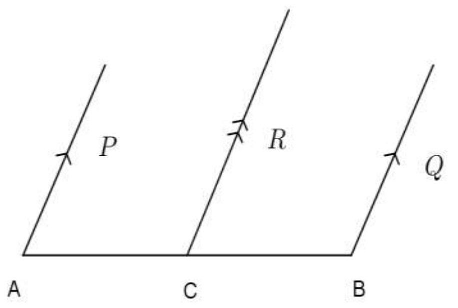
$$CC^{/} = AC^{/} - AC$$

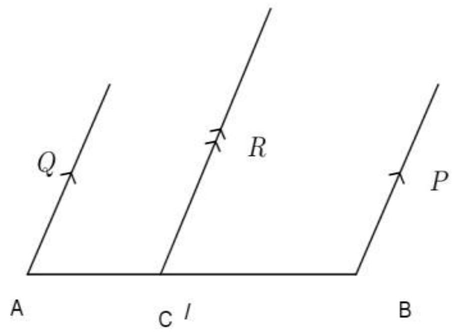
$$CC^{/} = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)\left[AC + x - AC\right]$$

$$CC = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)x$$

உதாரணம் 5

- விறைப்பான உடலொன்றில் உள்ள புள்ளிகள் A,B மீது முறையே இரு சமாந்தரமான விசைகள் P,Q தாக்குகின்றன. P,Q தம்முள் புறமாற்றும் போது விளையுள் AB யை வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)AB$ எனக் காட்டுக.





$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$$

$$AC = \left(\frac{Q}{P+Q}\right)AB$$

$$\frac{AC^{/}}{C^{/}B} = \frac{P}{Q}$$

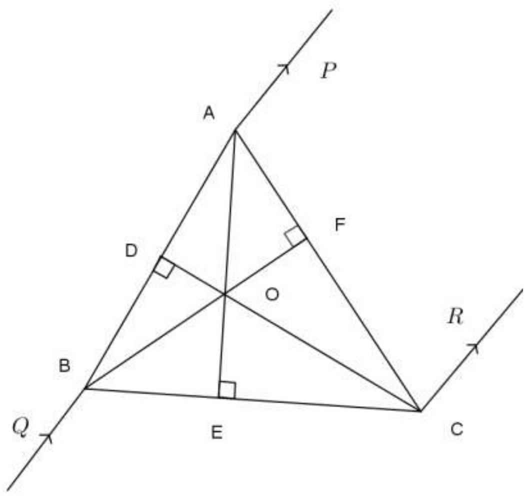
$$AC^{/} = \left(\frac{P}{P+Q}\right)AB$$

$$AC^{/} - AC = \left(\frac{P}{P+Q}\right)AB - \left(\frac{Q}{P+Q}\right)AB$$

$$= \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)AB$$

உதாரணம் 6

- P,Q,R என்ற ஒத்த சமாந்தரமான விசைகள் முக்கோணி ABC யின் உச்சிகளில் தாக்குகின்றன. இவ்விசைகளின் விளையுள் முக்கோணியின் நிமிர் மையம் ஊடாகச் செல்லும் எனின், $P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C$ எனக் காட்டுக.



முக்கோணியின் நிமிர்மையம் O என்க.

விளையுள் O வின் ஊடாகச் செல்கின்றது.

ஏனெனில் **CD $\perp$ AB**

$$\frac{AD}{DB} = \frac{Q}{P} = \frac{CD\cot A}{CD\cot B}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{\tan B}{\tan A} \qquad \text{..}(1)$$

இதேபோல் Q, R இன் விளையுள்ள E. ஊடாகச் செல்லும், இங்கு AE $\perp$ BC

$$\frac{BE}{EC} = \frac{R}{Q} = \frac{AE\cot B}{AE\cot C} = \frac{\tan C}{\tan B} \text{ ....}(2)$$

$$(1), (2) \quad \Rightarrow \; P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C$$

3.3 பயிற்சி

1. முக்கோணம் ABC யில் AB = 4 cm, BC = 3 cm, AC = 5 cm ஆகும். 2, 5, 3 N பருமனுடைய நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள் முக்கோணியின் உச்சிகள் A,B,C யில் தாக்குகின்றன. பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

   i) விளையுளின் பருமன்

   ii) விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் நிலை

2. P, P, 2P பருமனுடைய நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள் முக்கோணம் ABC உச்சிகள் A, B, C யில் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளானது புள்ளி C, AB இன் நடுப்புள்ளி என்பவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளியோடு செல்லும் எனக் காட்டுக.

3. நான்கு சமநிகர்த்த சமாந்தர விசைகள் சதுரம் ஒன்றின் உச்சிகளில் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளானது சதுரத்தின் மையமூடு செல்லும் எனக் காட்டுக.

4. மூன்று நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள் P, Q, R என்பன முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் A,B,C யினூடு தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளானது முக்கோணியின் தொகுதியின் விளையுளானது முக்கோணயின் உள்மையமூடு சென்றால் $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$ என காட்டுக.

5. $\overline{AB}, 2\overline{BC}, 3\overline{CD}, 4\overline{DA}$. எனும் நான்கு விசைகள் சதுரம் ABCD யின் பக்கங்கள் வழியே தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளைக் காண்க.

6. இரண்டு நிகராத சமாந்தர விசைகள் P, Q (P > Q) என்பன புள்ளிகள் A, B இல் தாக்குகின்றன. P,Q என்பன S இனால் அதிகரிக்கப்படுகையில் தொகுதியின் விளையுளானது $\frac{S.AB}{P-Q}$ தூரத்தினால் அசையும் எனக் காட்டுக.

7. மூன்று நிகர்த்த சமாந்தர விசைகள் P, Q, R என்பன முக்கோணி ABC யின் உச்சிகள் A, B, C யில் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளானது,

   (i) முக்கோணியின் மையப்போலி ஊடு செல்லுமாயின் P = Q = R எனவும்

   (ii) சுற்று வட்டமையமூடு செல்லுமாயின் $\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$ எனவும் காட்டுக.

8. மூன்று சமாந்தர விசைகள் P, 2P, 3P என்பன புள்ளிகள் A, B, C யில் தாக்குகின்றன. இங்கு OABC ஓர் நேர்கோடு ஆவதுடன் OA = a, AB = b, BC = c ஆகும்.

   தொகுதியின் விளையுளானது OABC யிலுள்ள புள்ளி D யினூடு தாக்கும் எனவும் OD = $\frac{6a+5b+3c}{2}$ எனவும் காட்டுக.

3.4 திருப்பம்

விறைப்பான உடலொன்றில் தாக்கும் விசைகள், அப்பொருளில் ஓர் புள்ளி நிலைத்ததாகப் பொருத்தப்பட்டிருப்பின் அதனைச் சுழற்ற முடியும்.

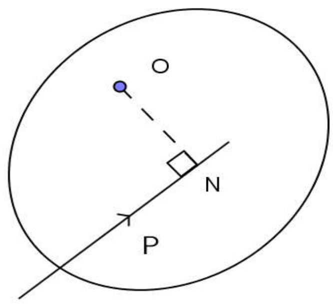
ஓர் புள்ளி நிலையானதாக பொருத்தப்பட்ட விறைப்பான உடலொன்றின் தாக்கும் தளி விசையொன்றானது, இவ்விசையின் தாக்கக்கோடானது, அந்நிலைத்த புள்ளி பற்றிச் செல்லாத போது அதனைச் சுழற்ற முடியும்.

வரைவிலக்கணம்:

யாதும் ஒரு புள்ளி பற்றி விசையொன்றின் திருப்பமானது அவ்விசையினதும், அப்புள்ளியிலிருந்து அவ்விசையில் தாக்கக்கோட்டிற்கான செங்குத்து தூரத்தினதும் பெருக்கமாகும்.

குறிப்பு:

தாக்கக்கோடானது O எனும் புள்ளியூடு செல்லுமாயின் புள்ளி O பற்றிய விசையின் திருப்பம் பூச்சியம் ஆகும்.



உருவில் உள்ள நிலைத்த புள்ளி O ஆகவும், ON என்பது O விலிருந்து விசை P யின் தாக்கக்கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்தாகவும் இருப்பின் O பற்றி விசை P யின் திருப்பம் வரைந்த $P \times ON$ ஆகும். அத்துடன் இது அடரை மணிக்கூட்டிற்கு எதிர்திசையில் திருப்ப K a Y k ; O பற்றி விசையில் திருப்பம் $P \times ON$ ஆகும்.

இணையின் SI அலகு Nm ஆகும். இணைகள் நேர் அல்லது எதிர் என்பதுடன் இவை மணிக்கூட்டிற்குத் திசை அல்லது அதற்கு எதிர்த்திசை என அப்புள்ளி பற்றிய திருப்பத்தினை பொறுத்து இது அமையும்.

குறித்த ஒரு தொகையான விசைகள் உடலொன்றில் தாக்கும் போது திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகையானது அப்புள்ளி பற்றித் திருப்பங்களின் பெறுமானங்களை அவற்றின் குறியுடன் காட்ட வருவதற்குச் சமனாகும்.

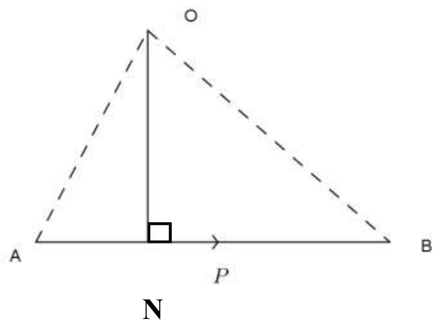
விசையொன்றின் திருப்பம் காவிக்கணியம் என்பதுடன், இது பருமன் திசை (போக்கு) என்பவற்றைக் கொண்டதாகும்.

இணையொன்றின் கேத்திர கணித வகைக் குறிப்பு

விசை P ஆனது கோட்டுத் துண்டம் AB யினால் பருமனிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படுகின்றது என்க. O என்பது திருப்பம் எடுக்கப்படும் புள்ளி எனக் கொள்க. ON ஆனது O விலிருந்து AB யிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்தாகவும் இருப்பின் விசை P யினால் புள்ளி O பற்றிய திருப்பம் $P \times ON = AB \times ON$ ஆகும்.

ஆனால் முக்கோணியின் பரப்பளவு $OAB = \frac{1}{2} AB \times BN$

ஆகவே முக்கோணம் AOB இன் பரப்பின் இருமடங்கு ஆகும். இங்கு, அதன் அடியானது விசையினையும் உச்சியானது திருப்பம் எடுக்கவேண்டிய புள்ளியும் என்பதால், திருப்பமானது இப்புள்ளி பற்றிய திருப்பத்தின் எண்பெறுமானத்திற்குச் சமனாகும். Nk Y k ; P, ON = 2ΔOAB ஆகும்.



குறிப்பு:

திருப்பம் பற்றிய சில அடிப்படை விடயங்களை நிறுவுவதற்கு வரைபு முறைக் குறிப்பீடுகள் பயன்படுத்தப்படும்.

வரிக்னோனின் தேற்றம்

ஒருதள விசைத்தொகுதியொன்றில் உள்ள யாதும் ஒரு புள்ளி பற்றி யாதும் இரு விசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகையானது, அப்புள்ளி பற்றி அவ்விசைகளின் விளையுளின் திருப்பத்திற்குச் சமனாகும்.

(i) விசைகள் சமாந்தரம் அல்லாதபோது

(ii) விசைகள் சமாந்தரமாகவுள்ளபோது

வகை (i) விசைகள் சமாந்தரம் அல்லாதபோது

நிறுவல் :

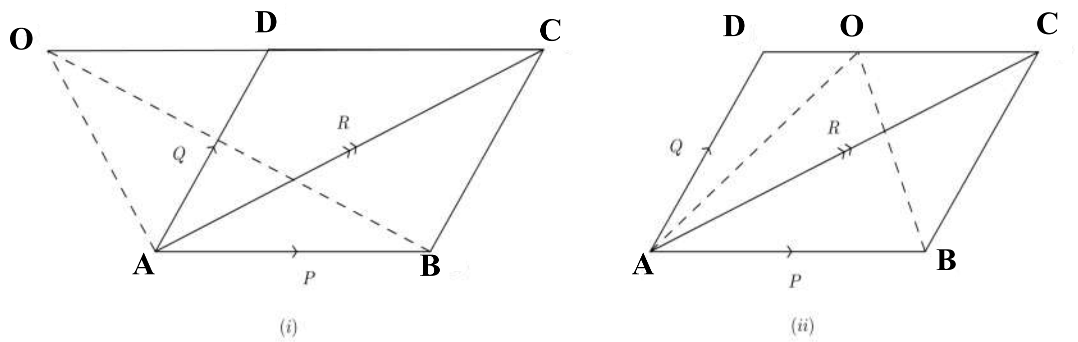
விசைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்போது, P, Q எனும் விசைகள் A எனும் புள்ளியில் தாக்குகின்றன எனவும் O என்பது அத்தளத்திலுள்ள புள்ளி எனவும், இப் புள்ளி பற்றித் திருப்பம் எடுக்கப்பட வேண்டியுள்ளது எனவும் கொள்க. விசை P இன் திசைக்குச் சமாந்தரமாக OC ஐ வரைக. இது Q இன் தாக்கக்கோட்டை C யில் வெட்டுகின்றது எனக் கொள்க.

AC ஆனது விசை Q இனை வகை குறிக்கின்றது எனவும், இதே அளவிடையில் விசை P இனை AB குறிக்கின்றது எனவும் கொள்க. OA, OB ஐ இணைத்து இணைகரம் ABCD இனைப் பூரணப்படுத்துக. AD ஆனது P, Q இன் விளையுள் R இனைக் குறிக்கும். மேலே காட்டப்பட்டவாறு O இற்கு இரு சாத்தியங்கள் உண்டு.

இரண்டிலும் O பற்றி P இன் திருப்பம் = 2ΔOAB

O பற்றி Q இன் திருப்பம் = 2ΔOAD

O பற்றி R இன் திருப்பம் = 2ΔOAC



உரு (1) இல், P, Q இன் திருப்பங்கள் $= 2\Delta OAB + 2\Delta OAD = 2\Delta ABC + 2\Delta OAD$

$= 2\Delta ACD + 2\Delta OAD = 2\Delta OAC$

உரு (ii) இல்,

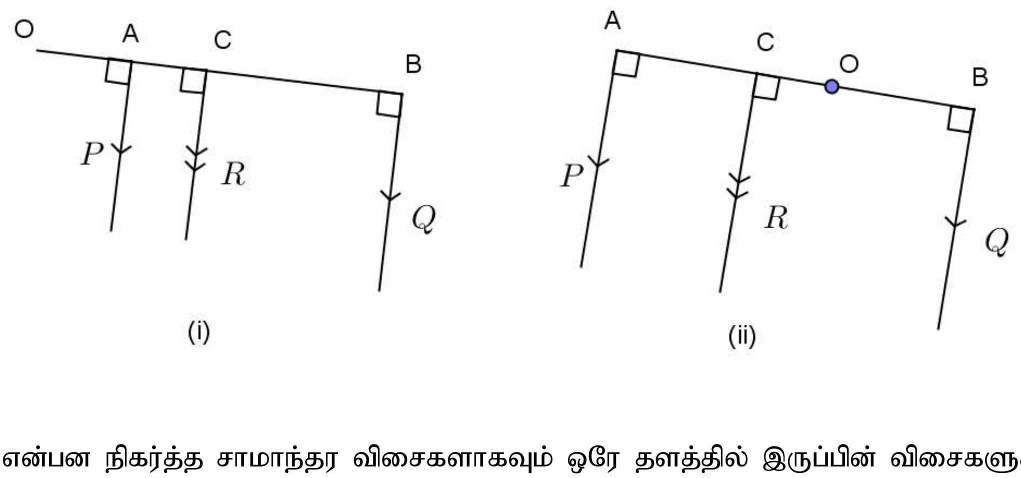
P, Q யின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை $= \Delta OAB - 2\Delta AOD$

$= 2\Delta ADC - 2\Delta AOD$

$= 2\Delta AOC$

= O பற்றி R யின் திருப்பம்

வகை (ii) விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமானவையாக உள்ளபோது.



P,Q என்பன நிகர்த்த சாமாந்தர விசைகளாகவும் ஒரே தளத்தில் இருப்பின் விசைகளுக்குச் செங்குத்தாகவும் விசைகளை A, B இல் சந்திக்குமாறு கோடு OAB வரைக.

P,Q இன் விளையுள் R ஆகவும் இது C யினோடு செல்வதாகவும் இருப்பின்,

இங்கு OC ஆனது R யிற்கு சமனாவதுடன் $AC : CB = Q : P$ ஆகும்.

உரு (i) இல் O பற்றி P,Q இன் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை $= P \times OA + Q \times OB$)

$= P(OC - AC) + Q(OC + CB)$)

$= (P + Q)OC - P \times AC + Q \times CB$)

$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}$ ஆதலால்,

$$P \times AC = Q \times CB$$

திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை $= (P + Q) \times OC$

$=$ O பற்றி R யின் திருப்பம்

உரு (ii) இல் P, Q யின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை $= P \times OA + Q \times OB$

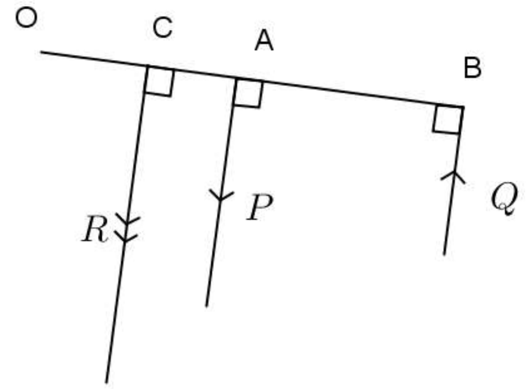
$= P \times OA - Q \times OB$

$= P(OC + CA) - Q(CB - OC)$

$= (P + Q)OC + P \times AC - Q \times CB$

$= (P + Q)\, OC$

$=$ O பற்றி R யின் திருப்பம்



விசைகள் நிகராத சமாந்தரமானவையாக உள்ளபோது,

P, Q என்பன நிகராத சமாந்தர விசைகள், $P > Q$ என்க,

ஆகவே $R = P - Q$

O பற்றி திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= P \times OA - Q \times OB$

$= P(OC + CA) - Q(OC + CB)$

$= (P - Q)OC + P \times AC - Q \times CB$

$= (P - Q)\, OC$

$=$ O பற்றி R யின் திருப்பம்

குறிப்பு : தாக்கக் கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரக்கணிதக் கூட்டுத்தொகை 0 ஆகும்.

ஒருமைப்படுத்தப்பட்ட தேற்றம்

இது திருப்பங்களின் தத்துவம் எனப்படும். விறைப்பான உடலொன்றின் தாக்கம் யாதும் எண்ணிக்கையான ஒருதள விசைகளின் விளையுள் அவற்றின் தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி பற்றிய திருப்பங்ளின் அட்சர கணிதக் கூட்டுத்தொகையாகும்.

ஒருதள விசைத் தொகுதியொன்று சமநிலையில் இருக்குமாயின் அவற்றின் விளையுள் 0 ஆவதுடன் அவற்றின் தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை 0 ஆகும்.

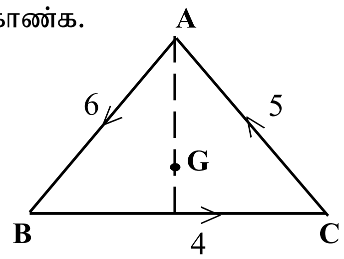
அதன் மறுதலை உண்மை அன்று.

> ஒருதள விசைத்தொகுதி ஒன்றின் தளத்தில் உள்ள யாதுமொரு புள்ளி பற்றிய விசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை 0 என்பது தொகுதி சமனிலையில் உள்ளது என்பதனைத் தரமாட்டாது, இது திருப்பம் எடுக்கப்பட்ட புள்ளியானது விளையுளின் தாக்கக் கோட்டில் இருப்பினும் நிகழும்.

3.5 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 7

4, 5, 6N பருமனுடைய விசைகள் முறையே முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. முக்கோணியின் மையப்போலி பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகையினைக் காண்க.



முக்கோணியின் மையப்போலி G என்க. $AD = 2\sin 60$

$$= 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}m$$

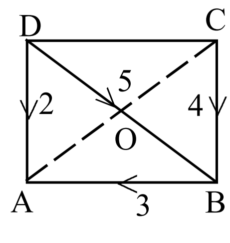
$$GD = GE = GF = \frac{1}{3}\sqrt{3}m$$

G பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை $= 4\times\frac{1}{\sqrt{3}} + 5\times\frac{1}{\sqrt{3}} + 6\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}\text{ Nm}$$

உதாரணம் 8

24 m பக்க நீளமுடைய சதுரம் ABCD இல் 4, 3, 2, 5N விசைகள் CB, BA, DA, DB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. விசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகையை,



(i) உச்சி C பற்றி (ii) சதுரத்தின் மையம் O பற்றி

$$CO = 4\cos 45 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

C பற்றிய விசைகளின் திருப்பம் $= 2\times 4 - 3\times 4 + 5\times 2\sqrt{2}$

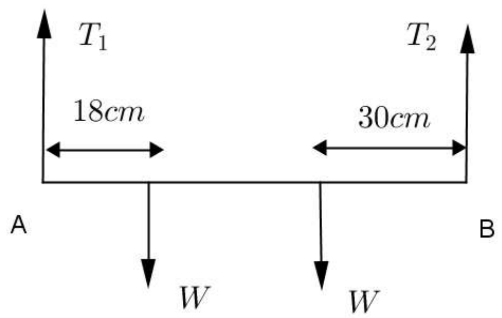
$= (10\sqrt{2} - 4)$ Nm

O பற்றிய விசைகளின் திருப்பம் $= 4\times 2 + 3\times 2 - 2\times 2$

$= 10$ Nm

உதாரணம் 9

இலேசான 72 cm நீளமுடைய கோலொன்றில் ஒருமுனையிலிருந்து 18 cm தூரத்திலும், மறுமுனையிலிருந்து 30cm தூரத்திலும் இரு சம நிறைகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கோலானது அதன் இருமுனைகளிலும் நிலைக்குத்து இழைகளினால் கோல் கிடையாக இருக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இழைகள் தாங்கக்கூடிய உயர் இழுவை 50N ஆகும். மேலே கூறியவாறு தொங்கவிடப்பட்டுள்ள நிறைகளில் உயர் பெறுமானத்தினைக் காண்க.



சமனான நிறை W எனவும், இழையில் இழுவை T_1, T_2N என்க.

கோலின் சமநிலைக்கு $\uparrow T_1 + T_2 - 2W = 0$

B) $-T_1 \times 72 + W \times 54 + W\times 30 = 0$

$72T_1 = 84W$

ஏனெனில் T_1 உயர்வாக இருக்க ($T_1 = 50$)

$72 \times 50 = 84W$

$$W = \frac{72\times 50}{84} = 42\frac{6}{7}N$$

A) $T_2 \times 72 - W\times 18 - W\times 42 = 0$

$72T_2 = 60$ W, ஏனெனில் T_2 உயர்வாக இருக்க ($T_2 = 50$)

$$W = \frac{72\times 50}{60} = 60 \text{ N}$$

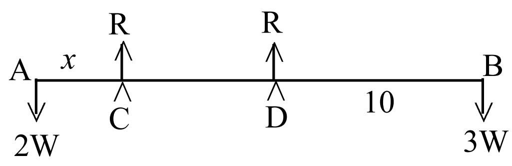
ஆகவே வைக்கக் கூடிய உயர் திணிவு $42\frac{6}{7}$N

உதாரணம் 10

20 cm நீளமுடைய இலேசான கோல் AB ஒன்றுக்கொன்று 10 cm இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு ஒப்பமான முனைகளின் மேல் சமநிலையடைகின்றது. A,B யில் முறையே 2W, 3W நிறைகள் தொங்கவிடப்படுகையில் முளைகளிலுள்ள மறுதாக்கங்கள் சமனாகுமாறு இவற்றின் நிலைகளைக் காண்க.

A யிலிருந்து x cm. தூரத்திலுள்ளது என்க.

கோல் சமநிலையிலுள்ளது. ஆகவே, C பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.



$$R \times 10 + 2Wx - 3W(20 - x) = 0$$

$$10R = 60W - 5Wx \quad \text{..............................} \ (1)$$

O பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$$R \times 10 + 3W(10 - x) - 2W(10 + x) = 0$$

$$10R = 5Wx - 10W \quad \text{.................................} (2)$$

$$(1) \ \& \ (2) \qquad 10x = 70$$

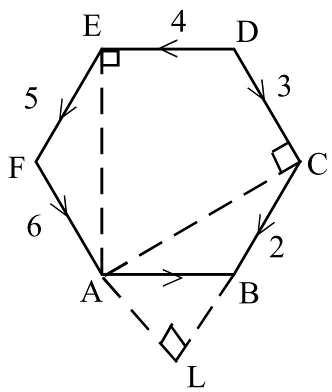
$$x = 7$$

A யிலிருந்து முனைகளின் தூரங்கள் 7cm, 17cm ஆகும்.

உதாரணம் 11

2m பக்க நீளமுடைய ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF இல் 1, 2, 3, 4, 5, 6N விசைகள் முறையே AB, CB, DC, DE, EF, FA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. இவற்றின் திருப்பங்களில் கூட்டுத்தொகையினை,

(i) உச்சி A (ii) அறுகோணியின மையம் O



$AL = 2\sin 60$

$= \sqrt{3}m$

A பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= 2 \times \sqrt{3} + 3 \times 2\sqrt{3} - 4 \times 2\sqrt{3} - 5 \times \sqrt{3}$ ○

$= -5\sqrt{3}$ ○

$= 5\sqrt{3}$ Nm m

$OM = 2\sin 60 = \sqrt{3}m$

O பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை

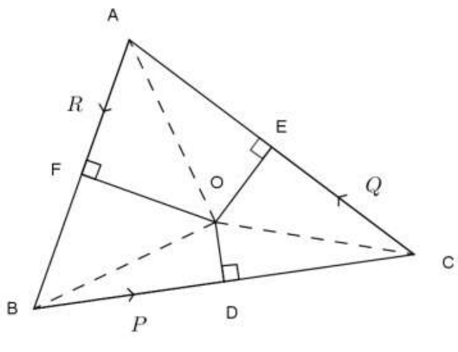
m $= 1 \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{3} - 3 \times \sqrt{3} + 4 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{3} + 6 \times \sqrt{3}$

$= 11\sqrt{3}$ Nm

உதாரணம் 12

P, Q, R எனும் மூன்று விசைகள் முக்கோணியின் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விசையுள் முக்கோணியின் நிமிஸ் மையமூடு செல்லுமாயின்,

PcosA + Q cosB + R cosC = 0 எனக் காட்டுக.



$B\hat{O}D = \hat{A}$, $C\hat{O}E = \hat{B}$

ஆரை R' என்க.
ஆயின், R' = OA = OB = OC ஆவதுடன்,

$A\hat{O}F = \hat{C}$ ஆகும்.

O பற்றித் திருப்பம் எடுக்க.

$P \times OD + Q \times OE + R \times OF = 0$

P. OBcosA + QOC. cosB + R. OAcosC = 0

ஆதலால் OB = OC = OA

PcosA + QcosB + RcosC = 0 ஆகும்.

3.6 பயிற்சி

1. 1, 2, 3, 4 kg திணிவுகள் 1.5 m நீளமும் 3 kg திணிவுடைய இலேசான நீர்க்கோல் ஒன்றில் ஒருமுனையிலிருந்து முறையே 0.3 m, 0.6 m, 0.9 m, 1.2 m உள்ள புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கோல் சமநிலையடையும் புள்ளியின் நிலையினைக் காண்க.

2. $3m$ நீளமுடைய ஓர் நீர்க்கோல் AB ஆனது 6 kg திணிவுடையது. கோலானது A கோலிலுள்ள இன்னோர் புள்ளி என்பவற்றில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. ஓரல் திணிவு $1kg$ A யில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள அதேவேளை B யிலிருந்து $1m$, $2m$ தூரங்களிலுள்ள புள்ளிகளில் முறையே $5\ kg$, $4\ kg$ திணிவுகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள A யில் தடிக்கும் விசை 40 N ஆயின், மறு தாங்கியின் நிலையினைக் காண்க.

3. $17\ kg$ திணிவும் $0.6\ m$ நீளமும் உடைய ஓர் நீர்க்கோல் AB ஆனது இரு நிலைக்குத்து இழைகளினால் தாங்கப்பட்டுள்ளது. ஓர் இழையானது ஒரு முனையிலிருந்து $7.5cm$ தூரத்தில் இருப்பதுடன் இது தாங்கக்கூடிய உயர் திணிவு $7\ kg$ ஆகவும், மறு இழை கோலின் மறுமுனையிலிருந்து $10\ cm$ தூரத்தில் இணைக்கப்பட்டிருப்பதுடன் இது தாங்கக்கூடிய உயர் திணிவு $10kg$ ஆகவும் உள்ளது. இவ் இழைகள் அறுந்து போகாமல் ஓர் $1.7kg$ திணிவினை இக்கோலிலிருந்து தொங்கவிடக்கூடிய புள்ளிகளின் நிலையினைக் காண்க.

4. ABCD என்பது a பக்கமுடைய ஓர் சதுரமாகும். விசைகள் 2, 3, 4 N என்பன A யில் AB, AD, AC வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளின் தாக்கக்கோடானது DC யினை வெட்டும் புள்ளியின் நிலையினைக் காண்க.

5. முக்கோணம் ABC யில் உச்சிகள் A,B,C யில் எதிர்ப்பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தான திசையில் விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதி சமநிலையிலிருப்பின் P : Q : R = a : b:c என காட்டுக.

6. முக்கோணம் ABC பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்கும் விசைகளின் விளையுள் முக்கோணியின் மையப்போலி உரு சென்றால் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

   (i) $\dfrac{P}{\sin A} + \dfrac{Q}{\sin B} + \dfrac{R}{\sin C} = 0$ (ii) $\dfrac{P}{BC} + \dfrac{Q}{CA} + \dfrac{R}{AB} = 0$

7. முக்கோணம் ABC யில் அதன் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதியில் விளையுள் முக்கோணியின் மையப்போலி, சுற்று வட்டமையமூடு செல்லின்,

   $\dfrac{P}{(b^2 - c^2)\cos A} = \dfrac{Q}{(c^2 - a^2)\cos B} = \dfrac{R}{(a^2 - b^2)\cos C}$ என நிறுவுக.

8. கூர்ங்கோண முக்கோணம் ABC யில் பக்கங்கள் BC, CA, AB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்கும் $P, \lambda P, \lambda^2$ எனும் விசைகளின் தாக்கத்தோடு முக்கோணியின் நிமிர்மையமூடு செல்லின்,

   $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{\lambda}{\cos B} = \dfrac{\lambda^2}{\cos(A+B)}$ எனக் காட்டுக.

3.7 இணைகள்

வரைவிலக்கணம்:

ஒரே நேர்க்கோட்டில் இல்லாத இரு சமனான நிகராத திசைகள் இணையொன்றை உருவாக்கும்.

இணையானது திரும்பும் வளைவு ஒன்றை உருவாக்கும்.

இணையானது அவற்றின் திருப்பங்களால் அளவிடப்படும்.

இரு விசைகளுக்கிடையிலான செங்குத்துத் தூரம் இவ்விசைகளின் கரம் எனப்படும்.

இணையின் திருப்பம்

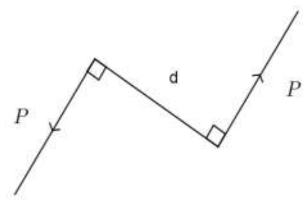
இணையின் திருப்பமானது அவற்றுள் யாதுமொரு விசையினதும் அக்கரத்தினதும் பெருக்கத்திற்குச் சமனாகும்.

அ∴து இணையொன்றின் திருப்பம்

= விசையொன்றின் பருமன் × அவ்விசைகளுக்கிடையிலான தூரம்

$M = P \times d$

$= Pd$ ↻



இணையொன்றானது அதன் திரும்பும் விளைவின் திசையானது மணிக்கூட்டுத்திசை அல்லது அதற்கு எதிர்த்திசை என்பதற்கேற்ப நேர், மறை எனப்படும்.

தேற்றம்

ஒரு தளத்தில் தாக்கி இணையொன்றை உருவாக்கும் இருவிசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை மாறிலி ஆக இருப்பதுடன் இது இணையின் திருப்பத்திற்குச் சமனாகும்.

நிறுவல்

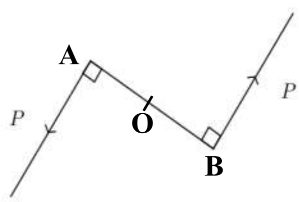
இணைக்குச் சமனான விசைகள் P,Q அவற்றின் தளத்திலுள்ள ஓர் புள்ளி O வில் தாக்குகின்றன எனக் கொள்வோம். விசைகளில் தளக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக கோடு AOB ஐ வரைக.

O பற்றிய அட்சரக் கணிதக் கூட்டுத்தொகை

$= P \times OB - P \times OA$

$= P \times AB$ ↻

= இணையின் திருப்பம்



O பற்றிய இணையின் திருப்பம்

$= P \times OA + P \times OB$

$= P(OA + AB)$

$= P(AB)$ ↻

ஆகவே O எடுப்புள்ளியாக இருப்பினும் இணையின் பருமன் சமனாகும்.

(அ∴து) இணையின் திருப்பமானது எடுக்கும் புள்ளி பற்றிச் சாராது.

தேற்றம்

தரப்பட்ட விறைப்பான உடலொன்றின் ஓரே தளத்தில் தாக்கும் இணைகரத்தின் விலையுள் ஓர் தளி இணைக்கு ஒடுங்குவதுடன், இவ் இணையின் பருமன் மற்றைய இணைகளில் திருப்பங்களில் அட்சரக்கணிதம் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமவலுவானதாகும்.

நிறுவல்

வகை (i)

இரு விசைகளினதும் தாக்கக்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாயுள்ளபோது (P,P), (Q,Q) எனும் விசைகள் உருவில் காட்டியவாறு தாக்கும் இணையினை உருவாக்கும் விசைகள் என்க. இவற்றின் தாக்கக்கோட்டிற்கு புள்ளி A யிலிருந்தான செங்குத்து OABCD என்க. தாக்கும் விசைகள் P, Q இல் A, F இல் விளையுள்ள P+Q ஆவதுடன் இது E இல் தாக்கும் இங்கு $AE : EF = Q : P$ அத்துடன் B,D இல் தாக்கும் விசைகளின் விளையுள் P+Q ஆவதுடன் இது C இல் தாக்கும். இங்கு $BC : CD = Q : P$ இப்போது சமனானதும் நிகராததுமான சமாந்தர விசைகள் P+Q இணை $P + Q$ இனை உருவாக்கும். இது இரு இணைகளினதும் விளையுள் இணையாகும்.

இணையின் திருப்பம் = O பற்றி E இல் தாக்கும் P+Q எனும் விசைகளின் திருப்பம்

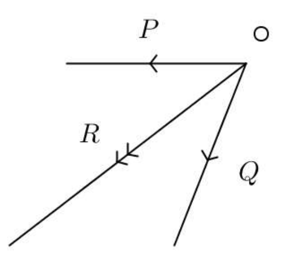
= A யின் விசை P, B யில் விசை P, F இல் விசை Q, R இல் விசை Q ஆல் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை.

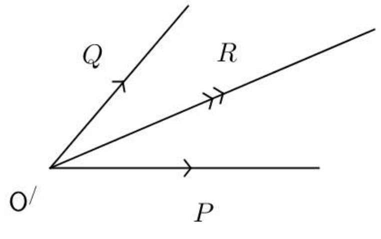
= தரப்பட்ட இணையின் திருப்பம்

வகை (ii)

விசைகளின் தாக்கக்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாக இல்லாதபோது P, P, Q, Q என்பன இணையினை உருவாக்கும். விசைகள் எனவும் இவற்றுள் யாதும் ஒரு விசை P உம் யாதும் ஒரு விசை Q உம் உருவில் காட்டியவாறு ஒரு புள்ளி O இல் சந்திக்கின்றன என்க.

O விலுள்ள விசைகள் P,Q இன் விளையுள் R உம் ஆகும். விளையுள் விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமனான நிகர்ந்த விசைகளாகும். இவை இணையொன்றை உருவாக்கும்.





இணையொன்றின் திருப்பம் = O பற்றி R இனால் O இல் திருப்பம் ஆகும்.

= P இனால் O' இல் திருப்பத்தினதும் கூட்டுத்தொகை.

= தரப்பட்ட இணையில் திருப்பங்களில் கூட்டுத்தொகை.

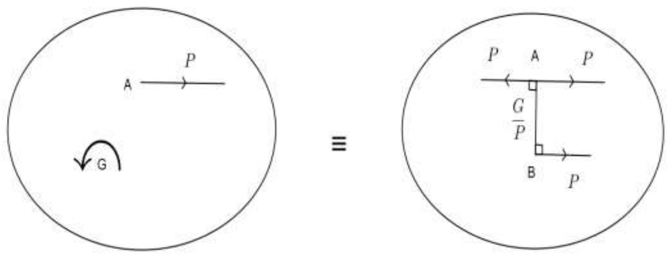
நாங்கள் பின்வருவனவற்றை உய்த்தறியலாம்.

1. தளமொன்றில் தாக்கும் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்த்திசையுள் சமபருமனுடைய இணைகள் ஒன்றையொன்று சமன் செய்யும்.
2. தளமொன்றில் ஒரே திசை, ஒரே பருமனுடைய இணைகள் சமவலுவானவை ஆகும்.

தேற்றம்

ஒரே தளமொன்றில் உள்ள இணை, விசையின் விளையுள் விசையொன்றும் இணை யொன்றும் விறைப்பான உடலொன்றில் ஒரே தளத்தில் தாக்குவனவாக இருப்பின் இவை, தரப்பட்ட தளவிசைக்குச் சமனானதும், சமாந்தரமானதும் இன்னோர் புள்ளியில் தாக்குவதுமான தளவிசைக்குச் சமவலுவானதாகும்.

நிறுவல்



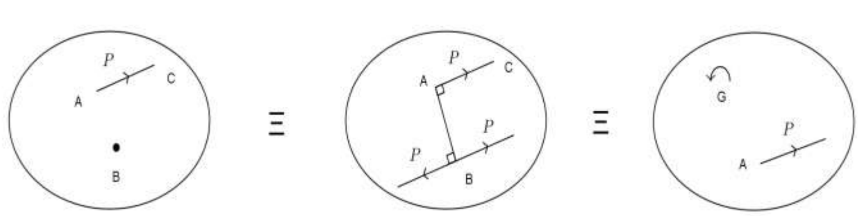
P என்பது A யில் தாக்கும் தனிவிசை எனவும், இதே தளத்தில் தாக்கும் விளையுள் G எனவும் கொள்வோம்.

G ஆனது A, B இல் தாக்கும் P, P எனும் விசைகளால் மாற்றீடு செய்யப்படலாம். இங்கு $AB = \frac{G}{P}$ ஆகும்.

ஒன்றையொன்று இப்போது சமனும் எதிருமான விசைகள் P, P ஒன்றையொன்று சமப்படுத்துவதுடன் விளையுள் P உம் இருக்கும், இது B இல் இருக்கும்.

தேற்றம்

விறைப்பான அடரொன்றில் தாக்கும் தளவிசையொன்றானது இன்னோர் புள்ளியில் தாக்கும் இவ்விசைக்கு சமனும் சமாந்தரமும் எதிர்த்திசையும் உடைய விசையொன்றுக்கும் இணைக்கும் சமவலுவானதாகும்.



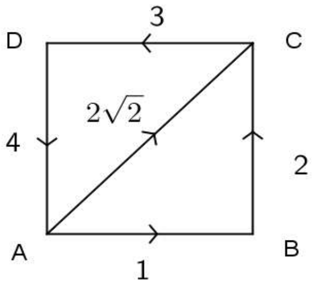
நிறுவல்

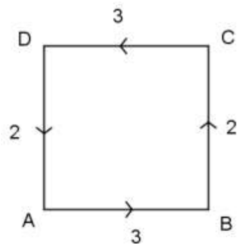
தரப்பட்ட விசை P ஆனது A யில் AC வழியே தாக்குகின்றது. என்க. B யாதுமொரு புள்ளி என்க. B யிலிருந்து AC யிற்கான செங்குத்துத் தூரம் d என்க. B யில் சமனும் எதிருமான சமாந்தர விசைகள் P,P யினை அறிமுகஞ் செய்க. A, B யில் உள்ள நிகராத சமாந்தர விசைகள் இணை G யினை உருவாக்கும். மற்றையது B யில் உள்ள தளவிசை P ஆகும்.

3.8 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 13

ABCD என்பது 1 m பக்கமுடைய சதுரமாகும். 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$ N பருமனுடைய திசைகள் முறையே பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA மூலைவிட்ட AC வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதியானது ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டி அதன் பருமனைக் காண்க.



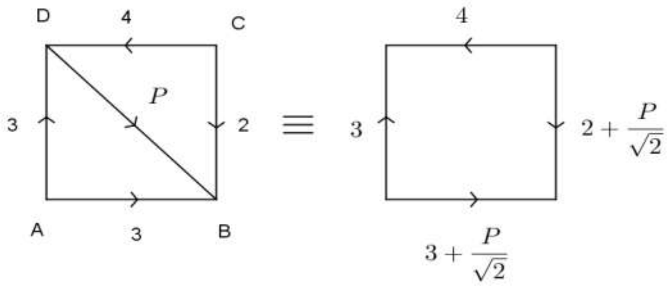


$2\sqrt{2}$ N பருமனுடைய விசையினை AD, AB வழியே கூறாக்க கூறுகள் $2\sqrt{2}\ \cos 45 = 2N$. ஆகும்.

இப்போது தொகுதி உருவில் காட்டியவாறு அதன் பக்கங்கள் வழியே தாக்கும் விசைகளுக்கு சமவலுவானதுடன் தொகுதி ஒரு தொகுதி சமனானதை நிகர்த்த சமாந்தர விசைகளை கொண்டிருக்கும். இவை ஓர் இணைக்கு ஒடுக்குவதுடன் இவற்றின் ஒன்று சேர்ந்த இணையானது $3 \times 1 + 2 \times 1 = 5$ Nm ௱ $3 \times 1 + 2 \times 1 = 5$ Nm ஆகும்.

உதாரணம் 14

ABCD என்பது ஓர் சதுரம் 3, 2, 4, 3, P N பருமனுடைய விசைகள் முறையே AB, CB, CD, AD, DB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமாயின் P யின் பெறுமானத்தினைக் காண்க.



PN ஐ AB, CD வழியே கூறாக்க $= \frac{P}{\sqrt{2}}$ N.

இணைக்கு ஒடுங்க $3 + \frac{P}{\sqrt{2}} = 4$ உம் $2 + \frac{P}{\sqrt{2}} = 3$ உம் ஆகும்.

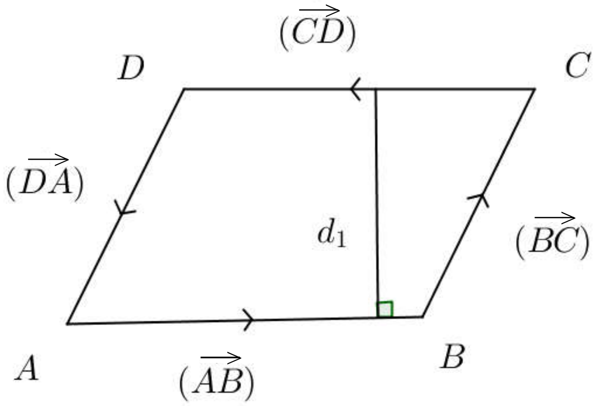
$\frac{P}{\sqrt{2}} = 1$ உம் $\frac{P}{\sqrt{2}} = 1$ உம் ஆகும்.

$P = \sqrt{2}$ உம் $P = \sqrt{2}$ உம் ஆகும்.

$\therefore\ P = \sqrt{2}$

உதாரணம் 15

இணைகரம் ABCD இல் விசைகள் AB, BC, CD, DA என்பன இணைகரப் பக்கங்கள் வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதி ஓர் இணைக்குச் சமவலுவானது எனக்காட்டி இவ்விணையில் திருப்பத்தின் பருமன் இணைகரப் பரப்பளவின் இருமடங்கு எனக் காட்டுக.



விசைகள் $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ என்பன சமனான நிகராத சமாந்தர விசைகளாகும் இவை $AB \times d_1$. பருமனுடைய இணைக்கு ஒருங்கும் இங்கு AB, CD இற்கு இடையிலான தூரம் d_1 ஆகும்.

விசைகள் $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ என்பன சமனான நிகராத சமாந்தர பருமனுடைய விசைகள் ஆயிருப்பதுடன் இவை $BC \times d_2$ இணைக்கு ஒடுங்கும். இங்கு BC, AD இற்கு இடைத்தூரம் d_2 ஆகும்.

இங்கு இரு திருப்பங்களும் ஒரே போக்குடையவனவாகையால் மொத்தத் திருப்பம் $AB \times d_1 + BC \times d_2$ ஆகும்.

3.9 பயிற்சி

1. ABCD என்பது 2 m பக்க நீளமுடைய ஓர் சதுரம் ஆகும். விசைகள் a, b, c, d என்பன முறையே AB, BC, CD, DA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. $p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$ N பருமனுடைய விசைகள் முறையே AC, BD வழியே தாக்குகின்றன. $p+q=c-a$ உம் $p-q=d-b$ உம் ஆயின், விசைகள் $a+b+c+d$ பருமனுடைய இணைக்குச் சமவலுவானவை எனக்காட்டுக.

2. P, Q என்பன நிகராத சமாந்தர விசைகள் ஆகும். இவ்விசைகள் உள்ள தளத்தில் F எனும் இணை பிரயோகிக்கப்படுகையில் தொகுதியின் விளையுள் $\frac{Fa}{(P+Q)}$ எனும் சமதூரத்தால் இடம் பெயர்க்கப்படும் எனக் காட்டுக.

3. விசைகள் P, Q, R எனும் விசைகள் முக்கோணம் ABC யிலுள்ள தொடலிகள் வழியே தாக்குகின்றன. இவை ஓர் இணைக்குச்சமவலுவானதாயின், $P:Q:R=\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C$ எனக் காட்டுக.

4. ABCD என்பது ஓர் சதுரமாகும். D,E என்பன முறையே CD, BC இன் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். விசைகள் P,Q,R என்பன முறையே AD, DE, EA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒழுங்குமாயின் $P:Q:R=\sqrt{5}:\sqrt{2}:\sqrt{5}$ எனக்காட்டுக.

5. விசைகள் 4, 3, 3 N (0.6 m பக்க நீளமுடைய சமபக்க) முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AB, BC, CA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. P N பருமனுடைய இன்னோர் விசை C யில் தொகுதி ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமாறு தாக்குகின்றது. P யின் பருமன், திசை ஆகியவற்றினைக் காண்க. மேலும் இணையின் பருமனைக் காண்க.

6. விறைப்பான உடலொன்றில் தாக்கும் மூன்று விசைகள் ஒழுங்காக எடுக்கப்பட்ட முக்கோணியொன்றின் பக்கங்களினால் பருமனிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படலாம். தொகுதியானது முக்கோணியின் பரப்பளவின் இருமடங்குடைய இணைக்குச் சமவலுவானது எனக் காட்டுக.

7. P, P, Q, Q விசைகள் சாய்சதுரம் ABCD இன் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. சாய்சதுரத்தின் மையம் O பற்றி திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகையினைக் காண்க. மேலும் விளையுளானது O விலிருந்து $\frac{BD}{2}\left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)$ தூரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக. $P=Q$ ஆகியிருக்கும் நிலைமையினை ஆராய்க.

4.0 விறைப்பான உடலில் தாக்கும் ஒருதள விசைகள்

4.1 ஒருதள விசைகளின் விளையுள்

2ஆம் அத்தியாயத்தில் நாங்கள் ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் விசைகள் பற்றி கருதினோம். இப்போது விறைப்பான உடலொன்றில் எல்லாம் ஒரு புள்ளியில் தாக்காத விசைகளைக் கருதுவோம்.

ஒருதள விசைகளின் விளையுள்

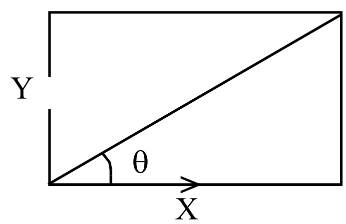
பருமனும் திசையும் தரப்பட்ட ஓர தொகுதி விசைகளின் விளையுளை நாங்கள் காணவேண்டும்.

விளையுளின் பருமன்

தரப்பட்ட விசைகளை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் துணிக்கவேண்டும். விசேடமாக X, Y திசைகளின் விளையுளின் பருமன் R ஆயின் $R^2 = X^2 + Y^2$ ஆல் தரப்படும்.

விளையுளின் திசை

X அச்சுடன் அமைக்கும் கோணம் θ என்க.



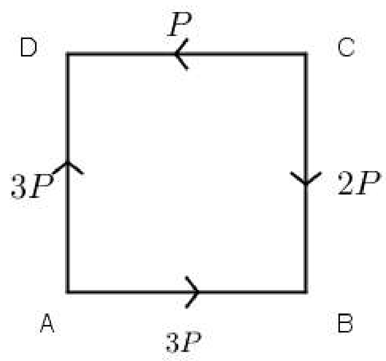
ஆகவே,
$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

தாக்கக் கோட்டின் நிலையைக் காண்க.

தரப்பட்ட கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி பற்றி திருப்பம் எடுப்பதன் மூலம், விளையுள் வெட்டுப்புள்ளியைக் காண்க.

உதாரணம் 1

$2a$ பக்க நீளமுடைய சதுரம் ABCD இல் விசைகள் 3P, 2P, P, 3P N பக்கங்கள் AB, CB, CD, AD வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன.



(i) பருமன், திசை

(ii) விளையுளின் தாக்கக்கோடு

ஆகியவற்றைக் காண்க.

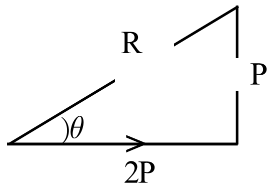
AB இற்கு சமாந்தரமாகத் துணிக்க. $\rightarrow X = 3P - P$
$$= 2P$$

AD இற்கு சமாந்தரமாகத் துணிக்க. $\uparrow Y = 3P - 2P$
$$= P$$
$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$= (2P)^2 + P^2 = 5P^2$$

$$R = P\sqrt{5}\text{ N}$$

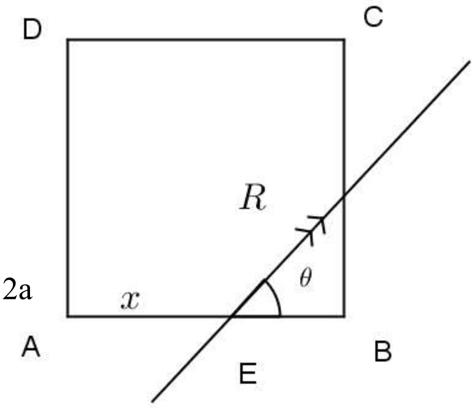
$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{P}{2P} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$



விளையுளின் பருமன் $P\sqrt{5}\text{ N}$ ஆவதுடன் இது AB யுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ கோணத்தை ஆக்கும். இது AB ஐ E யில் வெட்டுகின்றது என்க. இங்கு $AE = x$.

E பற்றி திருப்பம் எடுக்க,



$$\begin{aligned} 3Px + 2P(2a - x) - P \times 2a &= 0 \\ 3x - 2x &= 2a - 4a \\ x &= -2a \end{aligned}$$

அல்லது

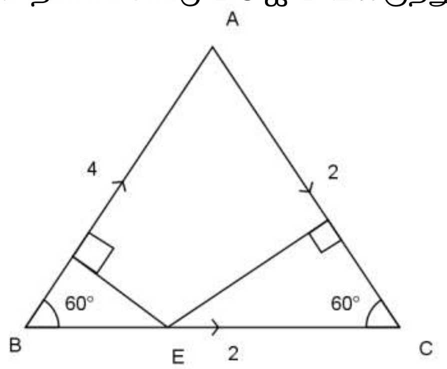
A பற்றி திருப்பம் எடுக்க,

$$\begin{aligned} R \times x\sin\theta &= P \times 2a - 2P \times 2a \\ P\sqrt{5} \times x \times \frac{1}{\sqrt{5}} &= -2Pa \\ x &= -2a \end{aligned}$$

விளையுள் நீட்டப்பட்ட AD ஐ A யிலிருந்து a தூரத்தில் வெட்டும்.

உதாரணம் 2

ABC என்பது 2a பக்க நீளமுடைய சமபக்க முக்கோணம், 4, 2, 2 N பருமனுடைய விசைகள் முறையே BA, AC, BC வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமனைக் கண்டு, இவ்விளையுளின் தாக்கக்கோடு BC ஐ B யிலிருந்து $\frac{2a}{3}$ தூரத்தில் வெட்டுமெனக் காட்டுக.



BC யிற்குச் சமாந்தரமாகத் துணிக்க,

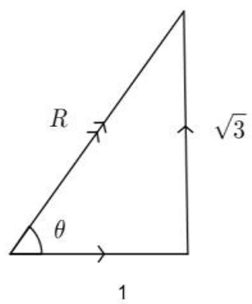
$$\rightarrow \quad X = 2 + 2\cos 60 - 4\cos 60$$
$$= 2 + 1 - 2 = 1$$

BC யிற்குச் செங்குத்தாகத் துணிக்க.

$$\uparrow \quad Y = 4\sin 60 - 2\sin 60$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

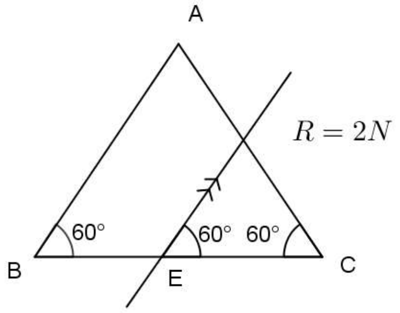
$$\begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 3 = 4 \\ R &= 2\text{N} \end{aligned}$$



$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$$

விளையுளின் பருமன் 2N, இது BC யுடன் 60° அமைக்கின்றது. விளையுள் BC ஐ E இல் வெட்டுகின்றது என்க.



E பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

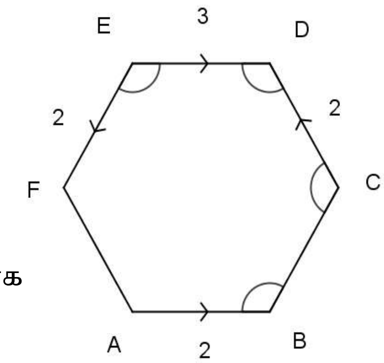
$$4 \times x\sin 60 - 2 \times (2a - x)\sin 60^\circ = 0$$
$$4x - 4a + 2x = 0$$
$$6x = 4a$$
$$x = \frac{2}{3}a$$

உதாரணம் 3

ABCDEF என்பது a பக்க நீளமுடைய ஒழுங்கான அறுகோணி ஆகவும் விசைகள் 2N, 2N, 3N, 2N முறையே பக்கங்கள் AB, CD, ED, EF வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுளின் பருமனைக் கண்டு, இது AB வழியே A யினூடு தாக்கும் எனக் காட்டுக.

AB, AE என்பன ஒன்றுக்கொன்று AB யிற்குச் சமாந்தரமாக விசைகளைத் துணிக.

AE இற்கு சமாந்தரமாக விசைகளைத் துணிக.



$$\rightarrow X = 2 + 3 - 2\cos 60 - 2\cos 60$$
$$= 3$$

AE இற்குச் சமாந்தரமாக விசைகளைத் துணிக.

$$Y = 2\sin 60 - 2\sin 60$$
$$= 0$$

$R = 3N$ AB இற்குச் சமாந்தரமாக

A பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$$2 \times 2a\sin 60 - 3 \times 4a\cos 30 + 2 \times 4a\cos 30$$
$$= 0$$

இது A யினூடு AB வழியே தாக்குகின்றது.

ஒருதள விசைகளை ஒடுக்குதல்

விறைப்பான பொருளொன்றில் தாக்கும் யாதும் ஒருதள விசைத்தொகுதி ஒன்றானது பொதுவாக, விசைத்தொகுதி யாதும் ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் தனிவிசையாகவும் இணையாகவும் ஒடுக்கப்படலாம்.

விசைகள் F_i $(i = 1, 2, ... n)$ என்பன புள்ளி P_i $(i = 1, ... n)$ எனும் ஒரு தளத்திலுள்ள புள்ளிகளில் தாக்குமெனின், செவ்வக தெக்காட்டுத் தொகுதி சார்பாக O வை உற்பத்தியாகக் கொண்ட அச்சுக்கள் OX, OY என்க.

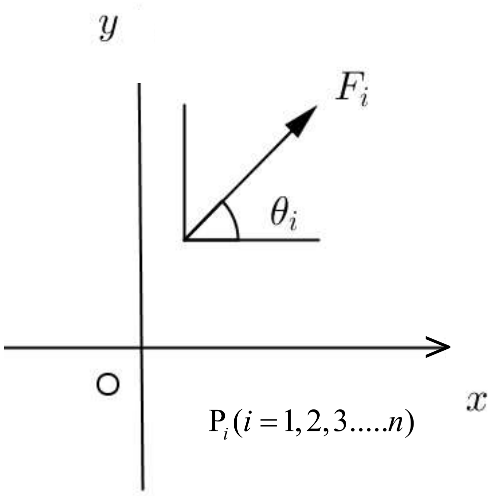
$P_i \equiv (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, ... n)$

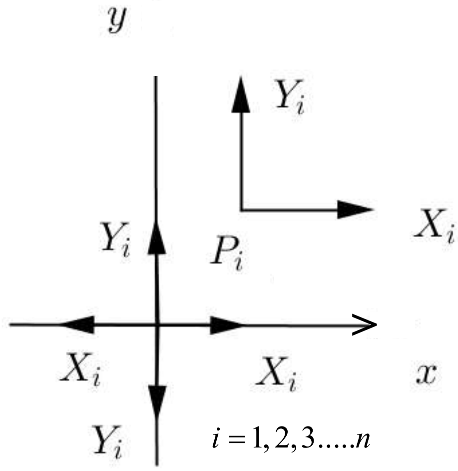
விசைகள் F_i $(i=1,2,3,....n)$ என்பன x அச்சுடன் θ_i கோணம் அமைக்கின்றன என்க.

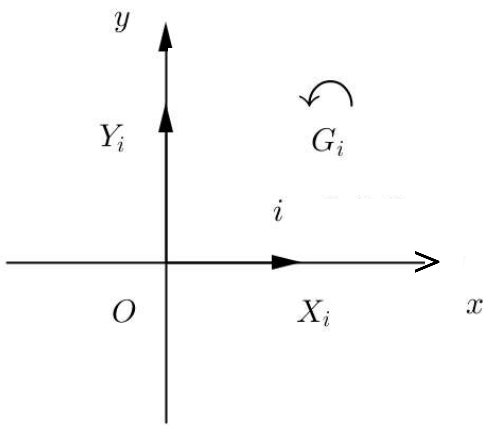
விசை F_i ஐ X_i, Y_i திசைகளில் துணிக.

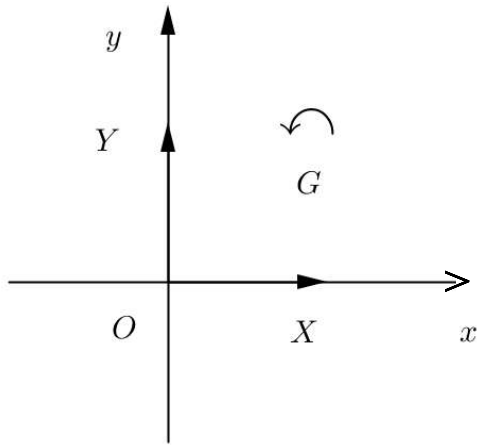
இங்கு $X_i = F_i\cos\theta_i$, $Y_i = F_i\sin\theta_i$ $(i = 1, 2,......n)$ ஆகும்.

சமனும் எதிருமான விசைகள் x_i, y_i ஐ O இல் அறிமுகப்படுத்துக. இது இவ்விசைத் தொகுதியில் எதுவித மாற்றத்தையும் ஏற்படுத்தாது.

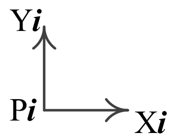




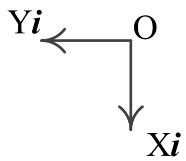


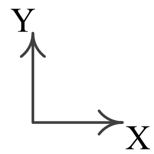


இப்போது



O வில்



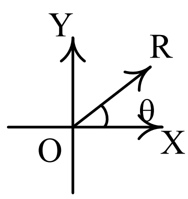


ஓர் இணை G_i ஐ உருவாக்குவதுடன் O இல் விசை ஆகும்.

$$G_i \circlearrowleft = Y_i.x_i - X_i.y_i$$

Let $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$



$$\text{ஆகவே} \quad R^2 = X^2 + Y^2$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\text{அத்துடன்} \quad G = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i - X_i y_i$$

குறிப்பு: இங்கு G என்பது தரப்பட்ட எல்லா விசைகளினதும் O பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

ஒருதள விசைத் தொகுதியொன்றின் சமநிலைக்கான நிபந்தனைகள்

யாதும் ஒரு விசைத்தொகுதியானது யாதுமொரு புள்ளி O வில் தாக்கும் தனிவிசை R ஆகவும் அதே தளத்திலுள்ள இணை G ஆகவும் ஒடுக்கப்படலாம்.

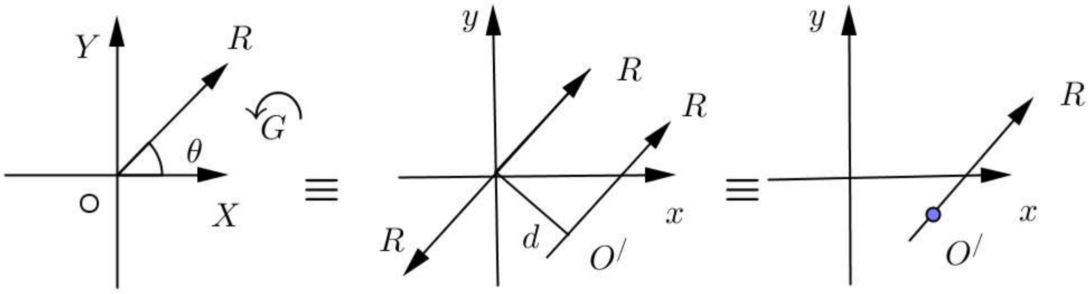
i. $R = 0, G = 0$ ஆயின் தொகுதி சமநிலையிலிருக்கும்.

ii. $R \neq 0, G = 0$ ஆயின் O வில் தாக்கும் தனிவிசைக்கு தொகுதி ஒடுங்கும்.

iii. $R = 0, G \neq 0$ ஆயின் தொகுதி G பருமனுடைய இணைக்கு ஒடுங்கும்.

iv. $R \neq 0, G \neq 0$ ஆயின், தொகுதி சமநிலையிலிருக்கமாட்டாது என்பதுடன் இன்னோர் புள்ளி O' இனூடு தாக்கும் தனிவிசையொன்றிற்கு தொகுதி ஒடுக்கப்படலாம்.

இங்கு கீழே காட்டியவாறு $OO' = \frac{G}{R}$ ஆகும்.



நிறுவல்:

இணை G யினை O, O' இல் தாக்கும் நிரோத சமாந்தர விசைகள் R, R இனால் மாற்றீடு செய்யப்படலாம். இங்கு விசைகளிற்கு இடையிலான தூரம் $d = \frac{G}{R}$ ஆகும்.

சமனும் எதிருமான விசைகள் ஒன்றையொன்று சமன் செய்யும் விளையுள் O' இனூடான தனிவிசை R' ஆகும்.

ஒரு தொகுதி விசைகளின் விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

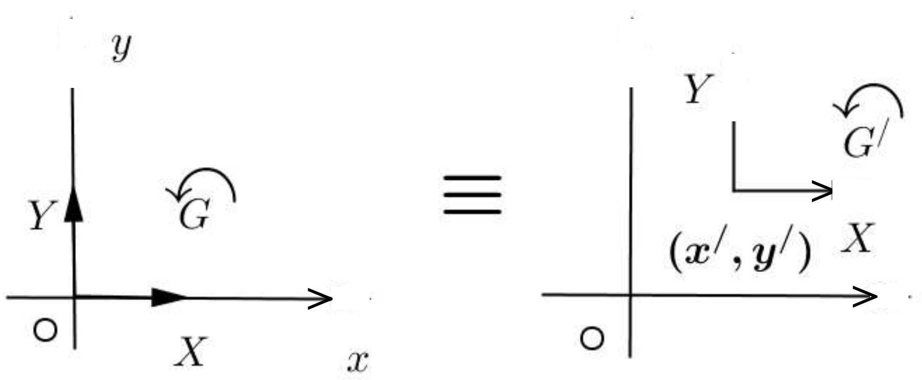
ஒரு தொகுதி விசைகள் சமநிலையில் இல்லாமலும் அவை தனிவிசை R இற்கு இணையொன்றுடன் G' ஒடுங்குவதாகவும் இருப்பின் (x', y').

ஆகவே $R^2 = X^2 + Y^2$ உம் $G' = G + Xy' - Y x'$ உம் ஆகும்.

தாக்கக்கோட்டில் உள்ள யாதுமொரு புள்ளி பற்றிய திருப்பம் பூச்சியம் ஆகும். தாக்கங் கோட்டில் உள்ள யாதுமொரு புள்ளி (x, y) என்க.

ஆயின், $G + Xy - Yx = 0$ ஆகும்.

இது விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு ஆகும்.



O பற்றிய திருப்பம் = O பற்றிய திருப்பம

$G = Yx' - Xy' + G'$

எனவே $G' = G + Xy' - Yx'$

விளையுள் (x', y') ஊடு செல்லுமாயின் $G' = 0$ ஆகும்.

$O = G + Xy' - Yx'$

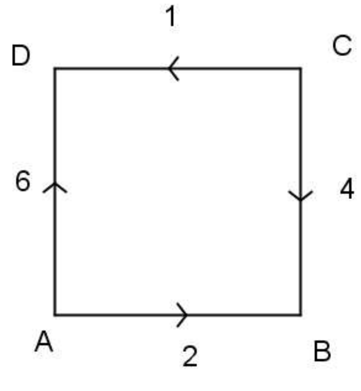
அத்துடன் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

$O = G + Xy - Yx$ ஆகும்.

4.2 செய்து காட்டப்பட்ட உதாரணங்கள்

உதாரணம் 4

விசைகள் 2N, 4N, 1N, 6N சதுரம் ABCD இல் பக்கங்கள் AB, CB, CD, AD வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. விளையுளின் பருமன், திசை ஆகியவற்றினைக் காண்க.



AB, AD ஐ ஆள்கூற்று அச்சுக்களாகக் கொண்டு விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

$2x - y + 3a = 0$ எனக் காட்டுக.

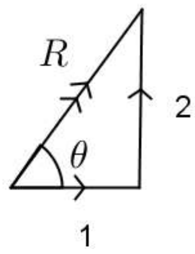
AB யிற்கு சமாந்தரமாக துணிக்க,

$\rightarrow X = 2 - 1 = 1$

AD யிற்கு சமாந்தரமாகத் துணிக்க,

$\uparrow Y = 6 - 4 = 2$

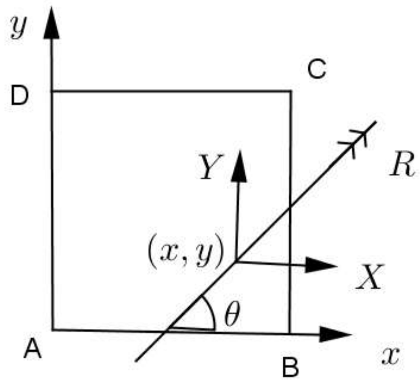
$$R^2 = X^2 + Y^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$
$$R = \sqrt{5}\,N$$



$$\tan\theta = \frac{X}{Y}$$
$$= 2$$
$$\theta = \tan^{-1}(2)$$

விளையுளின் பருமன் $\sqrt{5}$ N, இது AB யுடன் $\tan^{-1}(2)$ கோணத்தை அமைக்கும். A பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$$\circlearrowleft G = 1 \times a - 4 \times a$$
$$= -3a \text{ N}m$$



தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$G + Xy - Yx = 0$$
$$-3a + y - 2x = 0$$
$$2x - y + 3a = 0$$

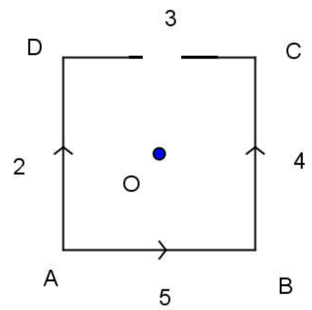
அல்லது

A பற்றி விளையுளின் திருப்பம்
= A பற்றி திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை

$$G = Yx - Xy$$
$$-3a = 2x - 1y$$
$$2x - y + 3a = 0$$

உதாரணம் 5

ABCD என்பது a பக்க நீளமுடைய சதுரமாகும். 5, 4, 3, 2 N பருமனுடைய விசைகள் முறையே பக்கங்கள் AB, BC, CD, AD வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தொழிற்படுகின்றன. தொகுதியினை கீழ்வருமாறு ஒடுக்க.



i. A யில் ஓர் தனிவிசையுடன் இணையொன்றுடன்

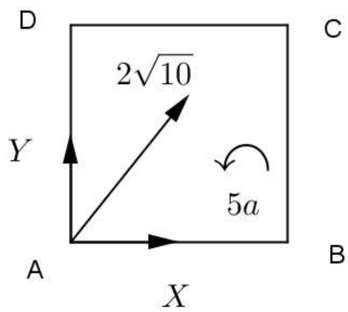
ii. O வில் தனிவிசையுடன் இணைக்க.

iii. AB, AD யினை அச்சுக்களாகக் கொண்ட தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

AB யிற்குச் சமாந்தரமான துணிக்க,

$$\rightarrow X = 5 - 3$$
$$= 2$$

AD யிற்கு சமாந்தரமாகத் துணிக்க,



$$\uparrow Y = 4 + 2$$
$$= 6$$

$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$= 40$$
$$R = 2\sqrt{10}$$

A பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

$$G = 4 \times a + 3 \times a$$
$$= 7a\ Nm$$

$2\sqrt{10}$ பருமனுடைய தனிவிசையொன்றாகவும் A யில் 7a Nm பருமனுடைய இணையொன்றாகவும் ஒடுக்கப்படலாம்.

$$G = 5 \times \frac{a}{2} + 4 \times \frac{a}{2} + 3 \times \frac{a}{2} - 2 \times \frac{a}{2}$$
$$= 5a\ Nm$$

மையத்தில், $2\sqrt{10}$ N பருமனும் விசையும் $5a$ Nm பருமனுடைய இணையும்.
தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$G + X.y - Y.x = 0$$
$$5a + 2y - 4x = 0$$
$$4x - 2y - 5a = 0$$

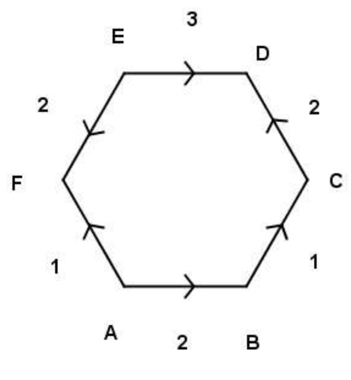
உதாரணம் 6

2a பக்க நீளமுடைய அறுகோணி ABCDF இல் 2, 1, 2, 3, 2, 1 N விசைகள் முறையே AB, BC, CD, ED, EF, AF வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன.

i. தொகுதியானது AD வழியேயான $2\sqrt{3}$N பருமனுடைய விசையொன்றுக்கும் இணையொன்றுக்கும் ஒடுக்கப்படலாம் எனக் காட்டி, இணையின் பருமனைக் காண்க.

ii. தொகுதியானது தனிவிசையொன்றுக்கு ஒடுக்கப் படலாம் எனக் காட்டி, இவ்விசையின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

iii. விளையுளின் தாக்கக்கோடானது நீட்டப்பட்ட FA இனை K இல் வெட்டுமாயின் AK இன் நீளத்தினைக் காண்க.



$\rightarrow X = 2 + 3 + 1\cos60 - 2\cos60 - 2\cos60 - 1\cos60$
$= 5 - 2 = 3$ N

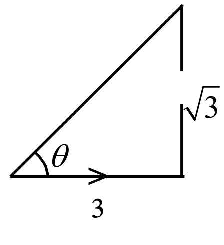
$\uparrow Y = 1\sin60 + 1\sin60 + 2\sin60 - 2\sin60 = \sqrt{3}$N

$R^2 = X^2 + Y^2 = 12$

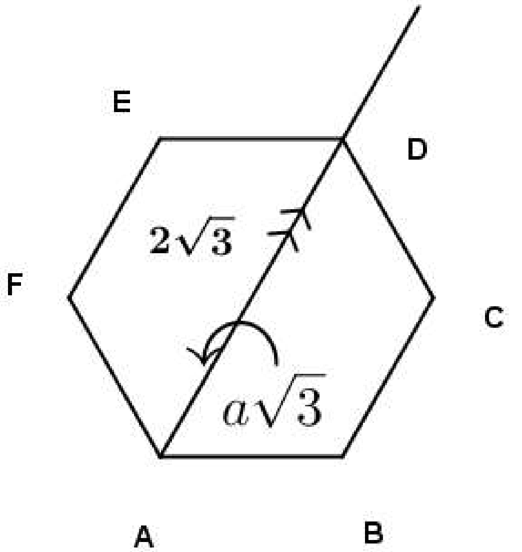
$R = 2\sqrt{3}$N

$$\tan\theta = \frac{X}{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\theta = 30°$



விளையுள் AD யிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

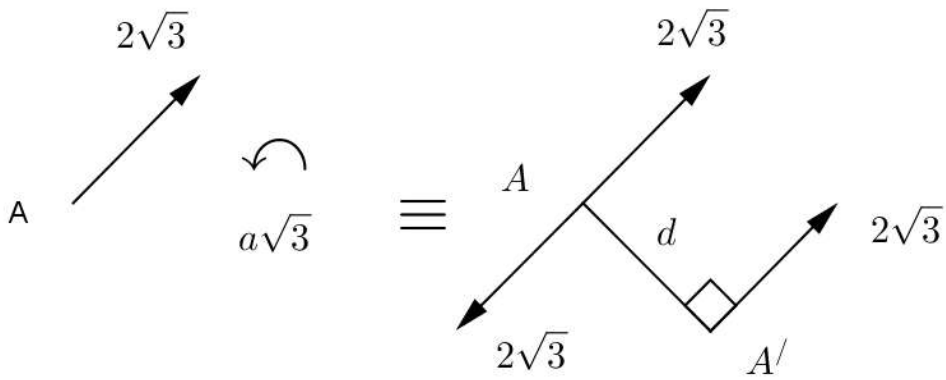


A பற்றி விசைகளின் திருப்பம்

$$G = 1 \times 2a\sin 60 + 2 \times 4a\cos 30 + 2 \times 2a\sin 60 - 3 \times 4a\cos 30$$
$$= a\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\,a + 2\sqrt{3}\,a - 6\sqrt{3}\,a$$
$$= a\sqrt{3}\ \mathrm{N}m$$

தொகுதி a இற்கு ஒடுக்கப்படலாம்.

AD வழியேயான விசை $2\sqrt{3}\,\mathrm{N}m$ உடன், $a\sqrt{3}\,\mathrm{N}$ பருமனுடைய இணையொன்றாக இணையின் பருமன்



மேலே காட்டியவாறு $2\sqrt{3}\,\mathrm{Nm}$ ↶ ஆனது $2\sqrt{3}\,\mathrm{N}$ பருமனுடைய நிகராத சம பருமனுடைய விசைகளால் மாற்றீடு செய்யப்படலாம்.

$$AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\,m$$

A யில் விசைகள் ஒன்றையொன்று சமன் செய்யும்.

ஆகவே இது A யில் $2\sqrt{3}$ N பருமனுடைய தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு தனிவிசைக்கு ஒடுங்கும்.

$$G + Xy - Yx = 0$$
$$a\sqrt{3} + 3y - \sqrt{3}x = 0$$
$$x - \sqrt{3}y - a = 0$$

தாக்கக்கோடு AB ஐ H இலும் நீட்டப்பட்ட FA ஐ K இலும் வெட்டும்.

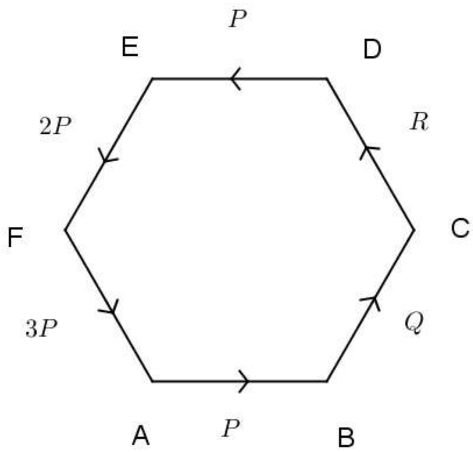
$(x_1, 0)$ $$x - \sqrt{3}y - a = 0$$
$$y = 0 \quad x_1 = a$$
$$E = (a, 0)$$
$$\sin 60 = \frac{AK}{AE}$$
$$AK = AE\sin 60$$
$$= \frac{a\sqrt{3}}{2} m$$

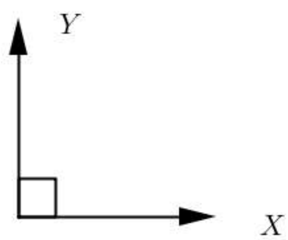
உதாரணம் 7

2a பக்க நீளமுடைய அறுகோணி ABCDEF இல் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DE, EF, FA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் முறையே விசைகள் P, Q, R, P, 2P, 3P N விசைகள் தாக்குகின்றன.

i. தொகுதியானது இணையொன்றுக்கு சமவலுவானதாயின் Q = 2P, R = 3P எனக் காட்டி இணையின் பருமனைக் காண்க.

ii. தொகுதியானது AD வழியேயான தனிவிசைக்கு ஒடுங்குமாயின் Q, R ஐ P யின் சார்பில் காண்க.





தொகுதி இணைக்கு சமவலுவானது

X = 0, Y = 0

$$\rightarrow X = Q\cos 60 - R\cos 60 - 2P\cos 60 + 3P\cos 60 = \frac{Q-R+P}{2}$$
$$X = 0; \quad Q - R + P = 0$$
$$R - Q = P \quad ....(1)$$

$\uparrow$ $Y = Q\sin 60 + R\sin 60 - 2P\sin 60 - 3P\sin 60 = (Q+R-5P)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$Y = 0; \quad Q + R = 5P \quad (2)$$

$$(1), (2) \qquad R = 3P \text{ and } Q = 2P$$

இணையின் திருப்பம் $=$ O பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (P + Q + R + P + 2P + 3P) \times a\sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3}\, aP\ \mathrm{N}m \ \ \mathrm{m}$$

(ii) $\qquad X = \dfrac{Q - R + P}{2}$

$$Y = (Q + R - 5P)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

விளையுள் AD யிற்கு சமாந்தரமாகும்

$$\theta = 60^\circ$$

$$\tan\theta = \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}(Q + R - 5P)}{Q - R + P}$$

$$Q - R + P = Q + R - 5P$$

$$R = 3P$$

AD வழியேயான தனிவிசை

O பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை 0.

$$(7P + Q + R)a\sqrt{3} = 0$$

$$10P + Q = 0$$

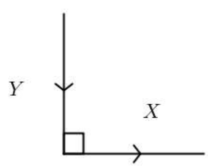
$$Q = -10P$$

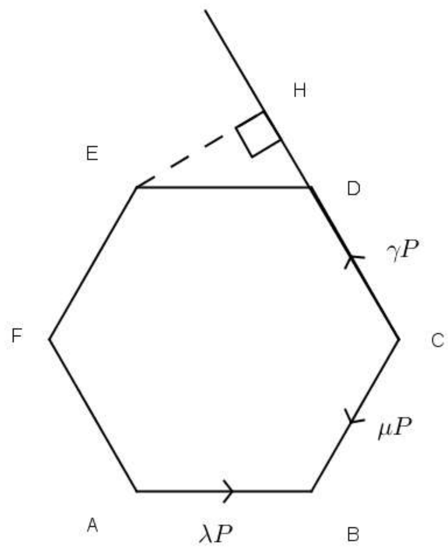
உதாரணம் 8

a பக்க நீளமுடை ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF இல் $\lambda P, \mu P, \gamma P$ பருமனுடைய விசைகள் முறையே AB, CB, CD வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. உச்சிகள் D, E, F பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை மணிக்கூட்டுத் திசையில் $2\sqrt{3}\,Pa$, $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}Pa$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}Pa$ ஆகும்.

i. λ, μ, γ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

ii. விளையுள் A யினூடான EC யிற்குச் சமாந்தரமான $\sqrt{3}$ P N பருமனுடைய தனிவிசை எனக் காட்டுக.





D பற்றிய திருப்பம்

$$\lambda P \times 2a\cos 30 - \mu P \times a\sin 60 = 2\sqrt{3}\,aP$$

$$2l\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$2\lambda - \mu = 4 \quad \text{..........................(1)}$$

E பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$\lambda P \times 2a\cos 30 - \mu P \times 2a\cos 30 + \gamma P \times a\sin 60$$

$$aP\frac{\sqrt{3}}{2}[2\lambda - 2\mu + \gamma] = 3a\frac{P\sqrt{3}}{2}$$

$$2\lambda - 2\mu + \gamma = 3 \quad \text{............................(2)}$$

$$\text{AE} = \text{BF} = \text{CE} = 2a\cos 30 = a\sqrt{3}$$

$$\text{EH} = a\sin 60 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

F பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$\lambda \text{P}a\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu P2a\frac{\sqrt{3}}{2} + \gamma P2a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a\text{p}\frac{\sqrt{3}}{2}[\lambda - 2\mu + 2\gamma] = a\frac{\text{P}\sqrt{3}}{2}$$

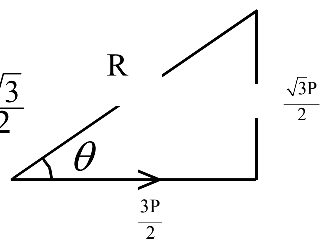
$$\lambda - 2\mu + 2\gamma = 1 \quad \text{........................ (3)}$$

$$(1), (2), (3) \quad \lambda = 3, \mu = 2, \gamma = 1$$

$$\rightarrow \text{X} = \lambda\text{P} - \mu\text{P}\cos 60 - \gamma\text{P}\cos 60$$

$$= 3\text{P} - 2\frac{\text{P}}{2} - \frac{\text{P}}{2} = \frac{3\text{P}}{2}$$

$$\uparrow \text{Y} = \mu\text{P}\sin 60 - \gamma\text{P}\sin 60 = \text{P}\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{R}^2 = \left(3\frac{\text{P}}{2}\right)^2 + \left(\text{P}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\text{P}^2$$

$$\text{R} = \text{P}\sqrt{3}\,\text{N}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad q = 30^\circ$$

A பற்றி விசைகளின் திருப்பம் A ↺ $\text{P} \times 2a\cos 30 - 2\text{P} \times a\cos 60$

$$= 0$$

விளையுள் A ஊடான தனிவிசை $\text{P}\sqrt{3}\,\text{N}$ ஆவதுடன் இது EC யிற்குச் சமாந்தரம் ஆகும்.

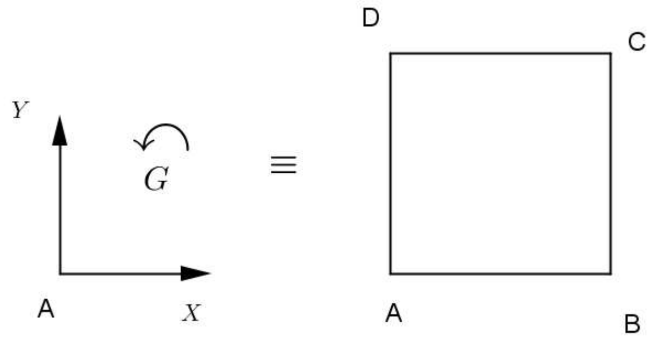
உதாரணம் 9

AB = 2a, AD = a பக்க நீளமுடைய செவ்வகம் ஆகும். A, B, C பற்றி தாக்கும் விசைகளின் திருப்பங்கள் முறையே M_1, M_2, M_3 ஆகும்.

i. D பற்றி தொகுதியின் திருப்பம்.

ii. தொகுதியின் விளையுளின் பருதன், திசை ஆகியவற்றினைக் காண்க.

iii. விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. இத்தாக்கக் கோடானது BC இற்குச் செங்குத்தானதாயின் $M_1 = 5M_2 + 4M_3$ எனக் காட்டுக.



காட்டியவாறு தொகுதி A யில் ஒருங்கப்பெற்றதாயின்,

இத்தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி (x, y) பற்றிய திருப்பம்

$$G' = G + Xy - Yx$$

$A = (0, 0)$, $B = (2a, 0)$, $C = (2a, a)$, $D = (0, a)$ எனக் கொள்க.

A பற்றித் திருப்பம் $M_1 = G + X.0 - Y.0$

$$G = M_1$$

B பற்றி $M_2 = M_1 + X(0) - Y(2a)$

$$Y = \frac{M_1 - M_2}{2a}$$

C பற்றி $-M_3 = M_1 + X(x) - Y(2a)$

$$-M_3 = M_1 + Xa - (M_1 - M_2)$$

$$X = -\frac{(M_2 + M_3)}{a}$$

D பற்றிய திருப்பம் $= (0, a)$

$$G' = M_1 - \frac{(M_2 + M_3)}{a} \times a - \left(\frac{M_1 - M_2}{2a}\right) \times 0$$

$$= (M_1 - M_2 - M_3)$$

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$= \left(\frac{M_2 + M_3}{a}\right)^2 + \left(\frac{M_1 + M_2}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{4(M_2+M_3)^2+(M_1-M_2)^2}{4a^2}$$

$$R = \frac{1}{2a}\left[(M_2+M_3)^2+(M_1-M_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

$$= \left(\frac{M_1-M_2}{2a}\right)\left(\frac{-a}{M_2+M_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2-M_1}{M_2+M_3}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{M_2-M_1}{2(M_2+M_3)}\right]$$

தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$G + Xy - Yx = 0$$

$$M_1 - \frac{(M_2+M_3)}{a}y - \left(\frac{M_1-M_2}{2a}\right)x = 0$$

$$(M_1 - M_2)x + 2(M_2 + M_3)y - 2aM_1 = 0$$

$$\text{கோட்டின் படித்திறன்} = \frac{(M_2-M_1)}{2(M_2+M_3)}$$

$$\text{படித்திறன் AC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(M_2-M_1)}{2(M_2+M_3)} \times \frac{1}{2} = -1$$

$$M_2 - M_1 = -4M_2 - 4M_3$$

$$5M_2 + 4M_3 = M_1$$

உதாரணம் 10

ஒரு தொகுதி விசைகள் $F_i\,(\boldsymbol{i} = 1, 2, ... n)$ புள்ளிகள் $P_i\,(\boldsymbol{i} = 1, 2, ... n)$ இல் தாக்குகின்றன. இங்கு Ox, Oy ஆள்கூற்று அச்சுக்கள் P_i இன் ஆள்கூறுகள் (x_i, y_i) ஆகும். ஒவ்வொரு விசையும் Ox அச்சுடன் θ கோணத்தினை அமைக்கின்றன.

i. தொகுதியை O வில் ஓர் தனிவிசையாகவும் இணையொன்றாகவும் ஒடுக்குக.

ii. விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டினைத் தருக.

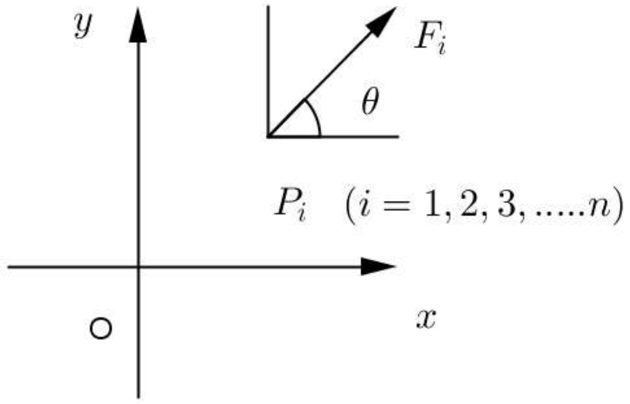
iii. θ மாறும்போது தொகுதியின் விளையுளானது இத்தளத்திலுள்ள புள்ளியொன்றினூடு செல்லும் எனக் காட்டி அப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

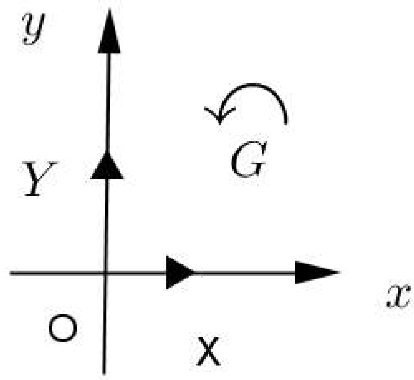
$$X_i = F_i\cos\theta \qquad \boldsymbol{i} = (1, 2, ... n)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = \cos\theta \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$Y_i = F_i \sin\theta \qquad \boldsymbol{i} = (1, 2, \ldots n)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sin\theta \sum_{i=1}^{n} F_i$$





O பற்றி விசை F_i இன் திருப்பம்

$$G_i = Y_i x_i - X_i y_i$$

திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$\begin{aligned}
G &= \sum_{i=1}^{n} G_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i x_i - X_i y_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i x_i - \sum_{i=1}^{n} F_i y_i \\
R^2 &= X^2 + Y^2 \\
&= \cos^2\theta \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right)^2 + \sin^2\theta \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right)^2 \\
R &= \sum_{i=1}^{n} F_i
\end{aligned}$$

தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$G + Xy - Yx = 0$$

$$\sin\theta \sum_{i=1}^{n} F_i x_i - \cos\theta \sum_{i=1}^{n} F_i y_i + y\cos\theta \sum_{i=1}^{n} F_i - x\sin\theta \sum_{i=1}^{n} F_i = 0$$

$$\sin\theta \left(\sum_{i=1}^{n} F_i x_i - x \sum_{i=1}^{n} F_i \right) - \cos\theta \left(\sum_{i=1}^{n} F_i y_i - y \sum_{i=1}^{n} F_i \right) = 0$$

$$x\sin\theta \sum_{i=1}^{n} F_i - y\cos\theta \sum_{i=1}^{n} F_i + \cos\theta \sum_{i=1}^{n} F_i y_i - \sin\theta \sum_{i=1}^{n} F_i x_i = 0$$

இது ஓர் மாறும் கோடு θ இல் தங்கியுள்ளது.
θ மாறும்போது,

கோடு ஒரு புள்ளியூடு செல்லும்.

இங்கு $x = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$ $\quad y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$

θ வைச் சாரவில்லை

நிலைத்த புள்ளியில் விசைகள் $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \right)$ அல்லது

$\sin\theta(\sum_{i=1}^{n} F_i x_i - x\sum_{i=1}^{n} F_i) - \cos\theta\ (\sum_{i=1}^{n} F_i y_i - y\sum_{i=1}^{n} F_i) = 0$ ஆகும்.
இது இரு விசைகளும் வெட்டும் புள்ளியூடு செல்லும் நேர்கோடாகும்.

$\sum_{i=1}^{n} F_i x_i - x\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$, $\qquad \sum_{i=1}^{n} F_i y_i - y\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$

θ வின் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும்

எனவே, இடைவெட்டும் புள்ளி $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \right)$

ஆகவே தாக்கக்கோடு

உதாரணம் 11

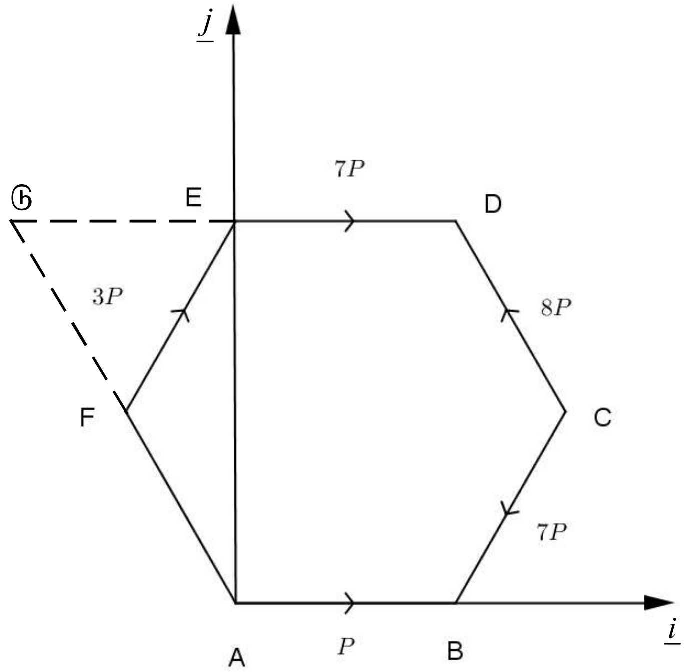
a m பக்க நீளமடைய ஒழுங்கான அறுகோணியின் பக்கங்களில் P, 7P, 8P, 3P N விசைகள் முறையே பக்கங்கள் AB, CB, CD, ED, FE வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ திசை வழியேயான அலகுக்காவிகள் i, j என எடுப்பதன் மூலம் ஒவ்வொரு விசையையும் i, j, p வடிவில் எடுத்துரைக்குக.

தொகுதியானது தனிவிசையொன்றுக்கு ஒடுங்குமாயின், $\underline{R} = 2P(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{i})$ எனும் இது $\overrightarrow{BC}$ இற்குச் சமாந்தரம் எனவும் காட்டுக.

$\underline{R}$ இன் பருமனைக் காண்க.

மேலும் தாக்கக்கோடானது DE, AF (இரண்டும் நீட்டப்பட்ட) இன் பொதுப்புள்ளி யினூடாகச் செல்லுமெனவும் காட்டுக.

தொகுதியானது A யினூடான தனிவிசை R இற்கும் ஓர் இணைக்கும் சமவலுவானதாயின் இவ் இணையின் பருமனைக் காண்க.



விசைகளாவன

$\overrightarrow{AB}$ வழியே $P\underline{\boldsymbol{i}}$

$\overrightarrow{CE}$ வழியே $7P\left(-\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{i}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\boldsymbol{j}}\right)$

$\overrightarrow{CD}$ வழியே $8P\left(-\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{i}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\boldsymbol{j}}\right)$

$\overrightarrow{ED}$ வழியே $7P\underline{\boldsymbol{i}}$

$\overrightarrow{FE}$ வழியே $3P\left(\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{i}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\boldsymbol{j}}\right)$

விளையுள் $\underline{R} = \left(1-\frac{7}{2}-\frac{8}{2}+7+\frac{3}{2}\right)P\underline{i} + \left(-\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) P\underline{j}$

$= 2P\underline{i} + 2\sqrt{3}\, P\underline{j}$

$= 2P\left(\underline{\boldsymbol{i}}+\sqrt{3}\,\underline{\boldsymbol{j}}\right)$ இது தனிவிளையுள் விசை ஆகும்.

$\overrightarrow{BC} = \frac{a}{2}\underline{\boldsymbol{i}}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\underline{\boldsymbol{j}}$

$= \frac{a}{2}\left(\underline{\boldsymbol{i}}+\sqrt{3}\,\underline{\boldsymbol{j}}\right)$

ஆகவே $\underline{\mathbf{R}}$ ஆனது $\overrightarrow{BC}$ யிற்குச் சமாந்தரமாகும்.

$$|\underline{R}| = \sqrt{(2P)^2 + (2\sqrt{3}P)^2}$$
$$= 4P$$

L பற்றித் திருப்பம் எடுக்க.

$P \times 2a\cos30 - 7P \times 3a\cos30 + 8P \times 2a\sin60 + 3P \times a\sin60$

$$21Pa\sin60 - 21Pa\cos30 = 0$$

விளையுளானது DE, நீட்டப்பட்ட AE என்பன வெட்டும் புள்ளியூடு செல்லுமா

4.3 பயிற்சி

1. a பக்க நீளமுடைய சதுரம் ABCD இல் $1, 3, 5, 7, 9\sqrt{2}$ N பருமனுடைய விசைகள் முறையே பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA வழியேயும் மூலைவிட்டம் BD வழியேயும் இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. AB, AD ஐ x, y அச்சுக்களாகக் கொண்டு

   i. தொகுதியின் விளையுளின் பருமன், திசை ஆகியவற்றினைக் காண்க.

   ii. விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

   iii. விளையுளானது AB ஐ வெட்டும் புள்ளியின் நிலையினைக் காண்க.

2. ABCDEF என்பது a பக்க நீளமுடைய ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றாகும். 1, 3, 2, 4 N பருமனுடைய விசைகள் முறையே AB, BE, ED, DA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. AB, AD ஐ x, y அச்சுக்களாகக் கொண்டு பின்வருவனவற்றினைக் காண்க.

   i. விளையுளின் பருமன், திசை

   ii. தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு.

3. a பக்க நீளமடைய ஒழுங்கான அறுகோணியின் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DE, DF, FA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F பருமனுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

   i. தொகுதியின் விளையுள் தரப்பட்ட விசைகளில் ஒன்றிற்குச் சமாந்தரமான திசையில் 6F பருமனுடைய விசையொன்றாகும்.

   ii. மேலே குறிப்பிட்ட அவ்விசைக்கும் விளையுள் விசைக்கும் அறுகோணியின் மையத்திலிருந்தான தூரங்களுக்கிடையிலான விகிதம் 2 : 7 எனக் காட்டுக.

4. சமபக்க முக்கோணி ABC யின் பக்கங்கள் AB, BC, CA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் 4, 3, 3 N பருமனுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன. பின்வருவனவற்றினைக் காண்க.

   i. விளையுளின் பருமன், திசை

   ii. C யிலிருந்து விளையுளின் தாக்கக் கோட்டிற்கான செங்குத்துத் தூரம்

iii. இப்போது மேலதிக விசை F ஆனது தளம் ABD இல் புள்ளி C இல் அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றது. இப்போது தொகுதியானது ஓர் இணைக்கு ஒடுங்குமாயின், இணையின் பருமனையும் சேர்க்கப்பட்ட விசையின் பருமன், திசை ஆகியவற்றினையும் காண்க.

5. புள்ளிகள் O, A, B, C இன் ஆள்கூறுகள் முறையே (0, 0), (3, 1), (3, 4), (1, 4) ஆகும். 7, 6, 2, 9, 5 N பருமனுடைய விசைகள் முறையே CA, AB, BC, CO, OB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. இவற்றுடன் இவ்விசைகளின் தளத்தில் ஓர் 16 அலகு பருமனுடைய இணையும் OCBA போக்கில் தாக்குகின்றது. இவ்விசைத்தொகுதியினை O இல் ஓர் விசையாகவும் இணையாகவும் ஒடுக்குக.

தொகுதியானது $3x - 4y - 5 = 0$ எனும் கோட்டின் வழியே தாக்கும் தனிவிசைக்கு சமவலுவானது எனக் காட்டுக.

6. a பக்க நீளம் மையம் O ஆகவுமுடைய ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF ஆகும். P, 2P, 3P, 4P, 5P N பருமனுடைய விசைகள் அறுகோணியின் பக்கங்கள் AB, BC, CD, DE, EF வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. இத்தொகுதிக்கு AF, FO, OA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்கும் Q, R, S N பருமனுடைய விசைகள் மேலதிகமாகச் சேர்க்கப்படுகின்றன. பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் Q, R, S இன் பெறுமானங்களை P சார்பில் காண்க.

i. முழுத்தொகுதியும் சமநிலையில் இருப்பின்

ii. ABC போக்கில் $P\sqrt{3}\,a$ பருமனுடைய இணைக்கு தொகுதி ஒடுங்குமாயின்

7. 2a பக்க நீளமுடைய ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றின் உச்சிகள் A, B, C, D, E, F ஆகும். P, 2P, P, mP, nP, 2P N பருமனுடைய விசைகள் அறுகோணியின் பக்கங்கள் AB, CB, DC, DE, FE, FA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன.

i. தொகுதியானது DA வழியேயான தனிவிசையொன்றுக்கு ஒடுங்குமாயின் m, n இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

ii. $2\sqrt{3}$ Pa Nm பருமனுடைய மணிக்கூட்டுத் திசையில் அமையும் ஓர் இணையொன்று தொகுதிக்குச் சேர்க்கப்படுகின்றது. புதிய தொகுதியானது தனிவிசையொன்றுக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டி, இத் தன்விசையின் தாக்கக் கோடானது AB ஐ (தேவையாயின் வெட்டப்பட்ட AB ஐ) வெட்டும் புள்ளியின் நிலையினைக் காண்க.

8. a பக்க நீளமுடைய சதுரம் ABCD ஆகும். 4, $6\sqrt{2}$, 8, 10, X, Y N பருமனுடைய விசைகள் முறையே AD, CD, AC, BD, AB, CB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. AC, CD இன் நடுப்புள்ளிகள் O, E ஆக இருக்கையில் தொகுதியின் விளையுளானது $\overline{OE}$ வழியே தாக்குகின்றது. ஆயின் x, y இன் பெறுமானங்களைக் கண்டு, தொகுதியின் விளையுளின் பருமன் 4K N எனக் காட்டுக.
இங்கு $K = 2 - \sqrt{2}$.

இப்போது, OAFD ஓர் சதுரமாகுமாறு ஓர் புள்ளி F என்க. மேற்படி தொகுதிக்கு சமவலுவானதாக, $\overrightarrow{AD}$ வழியானதும், புள்ளி F ஊடானதுமான இரு விசைகளைக் காண்க.

ஓர் 6ka N m பருமனுடைய ABCD திசையிலான இணையொன்று இவ்விசைகளின் தளத்தில் சேர்க்கப்படுகின்றது. புதிய தொகுதியின் விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

9. முக்கோணம் ABC யின் சுற்றுவட்டத்தின் மையம் O, அதன் ஆரை R ஆகும். L, L, M, M, N, N விசைகள் முறையே BC, OA, CA, OB, AF, OC வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. அத்துடன் ஓர் பூச்சியமற்ற lR (L + M + N) இணையொன்றானது இம்முக்கோணி ABC யின் தளத்தில் ABC திசையில் தாக்குகின்றது. தொகுதியானது,

   a. தனிவிசையொன்றுக்கு ஒடுங்குமாயின் $L^2 + M^2 + N^2 > LM + MN + NL$ எனக் காட்டுக.

   b. இணையொன்றுக்கு ஒடுங்குமாயின், $L = M = N, \lambda = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

   இத்தொகுதி சமநிலையில் இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனையினைக் காண்க.

10. ABCD என்பது 5 m பக்க நீளமுடைய சதுரம் ஒன்றாகும். AB இல் AE = 3m ஆகுமாறு E அமைந்துள்ளது. விசைகள் $\lambda P, \mu P, \gamma p, 2P, 10P, 2\sqrt{2}\,P$ பருமனுடைய விசைகள் முறையே, BA, BC, CD, AD, DE, DB வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன.

   i. தொகுதியானது சமநிலையில் இருப்பின் $\lambda = \mu = 6$ எனவும் $\sigma = 4$ எனவும் காட்டுக.

   ii. $\gamma + 4$ ஆகவும் $\lambda = \mu = 6$ ஆகவும் இருப்பின் தொகுதியானது தனிவிசையொன்றுக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டி, அதன் பருமன், திசை தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாடு என்பனவற்றைக் காண்க.

   iii. $\gamma = 2, \lambda = \mu = 6$ ஆயின், தொகுதி ஓர் 80 Nm பருமனுடைய இணைக்கு ஒடுங்குமாறு தொகுதிக்குச் சேர்க்கவேண்டிய விசையின் பருமன், திசை, தாக்கக்கோடு ஆகியவற்றினைக் காண்க.

11. விசைகள் P, 7P, 8P, &P, 3P N பருமனுடைய விசைகள் ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF இன் வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ வழியேயான அலகுக் காவிகளை $\underline{i}, \underline{j}$ என எடுப்பதன் மூலம் ஒவ்வொரு விசையினையும் $\underline{i}, \underline{j}$, P சார்பில் காண்க.

   $\overrightarrow{BC}$ இற்குச் சமாந்தரமான தரப்பட்ட தொகுதியானது ஓர் தனிவிசை $\underline{R} = 2P\left(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j}\right)$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

RP இன் பருமன் யாது?

தொகுதியில் விளையுளின் தாக்கக்கோடானது DE, AF (தேவையாயின் நீட்டப்பட்ட) பொதுப்புள்ளியூடு செல்லும் எனக் காட்டுக.

தொகுதியானது உச்சி A ஊடு தாக்கும் ஓர் தனிவிசை R இற்கும் இணைக்கும் சமவலுவானதாயின் இணையின் பருமன் போக்கு ஆகியவற்றினைக் காண்க.

12. புள்ளிகள் A, B, C இன் ஆள்கூறுகள் OX, OY அச்சுத்தொகுதி சார்பாக முறையே $\left(\sqrt{3},0\right)$, (0, -1), $\left(2\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$ ஆகும். 6P, 4P, 2P, $2\sqrt{3}\,P$ பருமனுடைய விசைகள் முறையே OA, BC, CA, BO வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன.

தொகுதியின் விளையுளின் பருமன், திசை ஆகியவற்றினைக் காண்க.

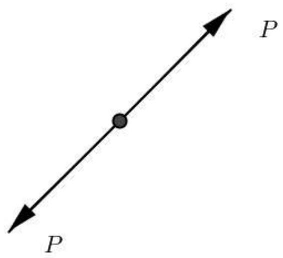
இவ்விசைகளின் விளையுளின் தாக்கக்கோடானது y அச்சினை வெட்டும் புள்ளியினைக் காண்க.

இதிலிருந்து விளையுளின் தாக்கக்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

இன்னோர் $6\sqrt{3}\,P$ N பருமனுடைய விசையொன்று $\overrightarrow{AB}$ வழியே தொகுதிக்குச் சேர்க்கப்படுகையில், தொகுதியானது 10 P N பருமனுடைய இணைக்கு ஒழுங்குமெனக் காட்டுக.

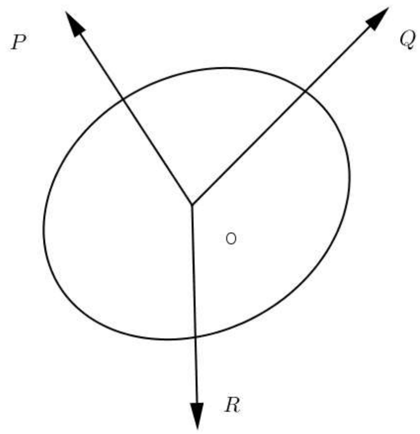
4.4 ஒருதள விசைகளின் தாக்கத்தின்கீழ் விறைப்பான அடரொன்றின் சமநிலை

(1) இரு விசைகளின் தாக்கத்தின் கீழ்



இரு விசைகளும் பருமனில் சமனாயும் ஒன்றுக்கொன்று உதிரான திசைகளில், ஒரே நேர்கோட்டில் தாக்குபவனவாகவும் உள்ளபோது அடர் சமநிலையிலிருக்கும்.

(2) மூன்று விசைகளின் தாக்கத்தின் கீழ்



இங்கு நாங்கள் இரு வகைகளைக் கருதவேண்டும்.

(i) எல்லா மூன்று விசைகளும் சமாந்தரமல்லாதபோது

(ii) எல்லாம் சமாந்தரமானபோது

(i) இல், எல்லா மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பதுடன், இவற்றுள் யாதும் இரு விசைகளின் விளையுள் மூன்றாம் விசைக்குப் பருமனில் சமனாயும், திசையில் எதிராயும் ஒரே தாக்கக்கோட்டிலும் இருத்தல் வேண்டும்.

நிறுவல் :

P, Q, R என்பன விறைப்பான பொருளொன்றில் தாக்கும் மூன்று விசைகளெனக். P, Q என்பன ஒரு புள்ளி O இல் சந்திக்கின்றன. ஆகவே, P, Q இன் விளையுள் O வினூடு செல்லும். இப்போது தொகுதியானது இருவிசைகளாகிவிட்டது. ஆகவே சமநிலைக்கு R ஆனது O வினூடு செல்லவேண்டும். அத்துடன் இது P, Q இன் விளையுள் விசைக்கு சமனாவதுடன் அதற்கு எதிர்த்திசையிலும் ஒரே நேர்கோட்டிலும் இருத்தல் வேண்டும்.

முறை (i) இலாமியின் தேற்றத்தை உபயோகிக்க.

$$\frac{P}{\sin(90+\theta)}=\frac{R}{\sin 90^\circ}=\frac{W}{\sin(180-\theta)}$$

$$\frac{P}{\cos\theta}=R=\frac{W}{\sin\theta}$$

$$P=W\cot\theta$$

$$R=W\operatorname{cosec}\theta$$

$$P=\frac{W}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}W}{6}N$$

$$R=W\sqrt{\frac{13}{12}}N$$

$$ED=\frac{1}{2}\times 2a\cos 60^\circ=\frac{a}{2}$$

$$\tan\theta=\frac{AE}{ED}=2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{13}{12}}$$

முறை (ii)

முக்கோணம் AED இல் AE ஆனது W இற்கு சமாந்தரமாகவும் ED, DA ஆல் விசைகள் P, R குறிக்க.

அதாவது, ΔAED இவ்விசைகளைக் குறிக்கும் விசைமுக்கோணியாகும்.

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & DA \\ W & \rightarrow & AE \\ P & \rightarrow & ED \end{array}$$

எனவே $\frac{P}{ED}=\frac{W}{AE}=\frac{R}{DA}$

$$\frac{P}{\frac{a}{2}}=\frac{W}{\sqrt{3}a}=\frac{R}{\frac{\sqrt{13}a}{2}}$$

$$AD=\sqrt{3a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}a$$

$P=\frac{W}{2\sqrt{3}}$ உம் $R=W\sqrt{\frac{13}{12}}$ உம் ஆகும்.

முறை (iii) விசைகளைக் கூறாக்க

கிடையாகத் துணிக்க. $\rightarrow$

$$P - R\cos\theta=0$$

$$P=R\cos\theta$$

நிலைக்குத்தாகத் துணிக்க. $\uparrow$

$$R\sin\theta-W=0$$

$$R=\frac{W}{\sin\theta}=W\sqrt{\frac{13}{12}}N$$

$$P=W\cot\theta=\frac{W}{2\sqrt{3}}N$$

முறை 1 : DACD இல் sin விதிப்படி

$$\frac{AC}{\sin 30} = \frac{AD}{\sin(120-\theta)}$$

$$\frac{AC}{\frac{1}{2}} = \frac{2a\sin\theta}{\cos(30-\theta)}$$

$$AC = \frac{a\sin\theta}{\cos 30\cos\theta + \sin 30\sin\theta} = \frac{a}{\cos 30\cot\theta + \sin 30}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+1} = \frac{2a}{3}$$

$$AC = \frac{1}{3}AB$$

முறை 2 : இலாமியின் தேற்றப்படி

$$\frac{T}{\sin 90} = \frac{W}{\sin 180} = \frac{R}{\sin 150}$$

$$T = \frac{W}{\cos 30}$$

$$T = \frac{2W}{\sqrt{3}}N$$

$$R = \frac{\cos 60}{\cos 30}$$

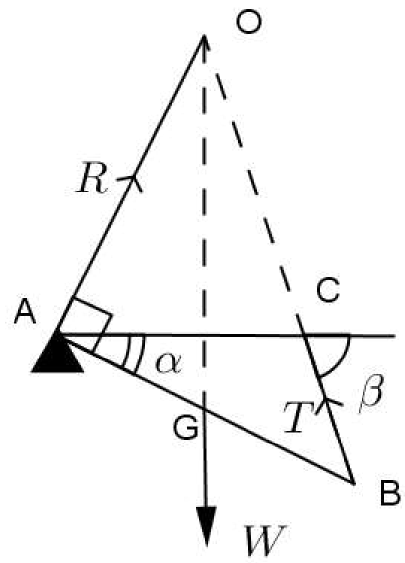
$$R = \frac{W}{\sqrt{3}}N$$

உதாரணம் 3:

ஓர் சீர்க்கோல் AB ஆனது, அதன் மேல்முனை A ஆனது ஒப்பமான முனையொன்றில் பொறுத்திருக்க. அதன் மறுமுனை B இற்கு இணைக்கப்பட்டு, A யுடன் ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள புள்ளி C இற்கு இணைக்கப்பட்ட இலேசான நீளா இழையினால் சமநிலை பேணப்படுகின்றது. கிடையுடன் கோலின் சாய்வு α ஆகும். இழை கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் β ஆயின்,

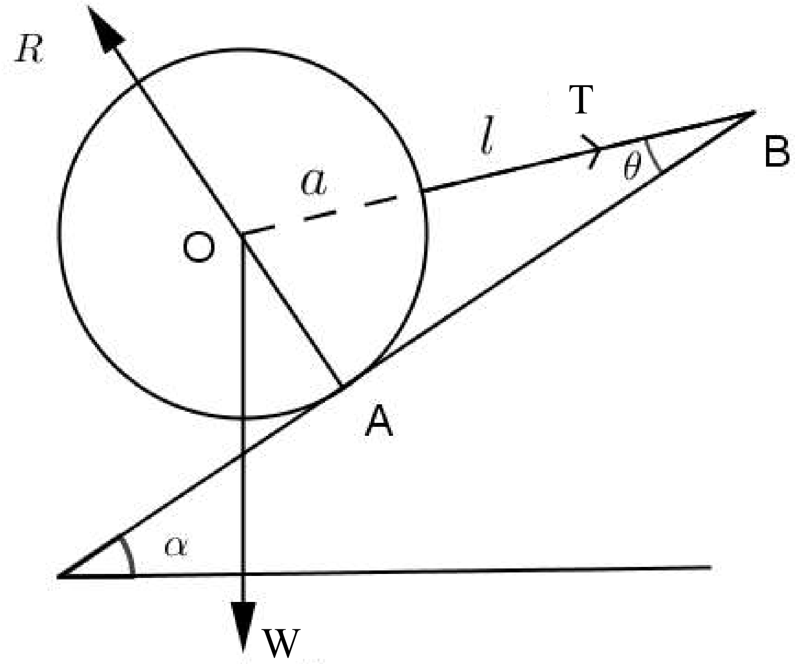
$\tan\beta = 2\tan\alpha + \cot\alpha$ எனவும்

$AC = \dfrac{AB\sec\alpha}{1+2\tan^2\alpha}$ எனவும் காட்டுக.



உதாரணம் 4:

W நிறையும் a ஆரையுமுடைய ஓர் கோளமொன்றானது கிடையுடன் α சாய்வுடைய சாய் தளமொன்றில் கிடக்க, கோணத்தின் மீதுள்ள புள்ளியொன்றைச் சாய்தளத்துடன் இணைக்கும் இலேசான நீளா இழையினால் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. இழையில் இழுவை $\dfrac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$ எனக் காட்டுக.



தாக்கும் விசைகள்

i. கோளத்தின் திணிவு W, அதன் மையம் O இனூடு நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி

ii. தளத்தினால் செவ்வன் மறுதாக்கம் R, இது O வினூடு செல்லும்.

iii. இழையில் இழுவை T

கோளம் மூவிசைக்கோலின் தாக்கத்தின்கீழ் சமநிலையிலிருப்பதால், இழுவை O வினூடு செல்லல் வேண்டும்.

முக்கோணம் AOB இல்

$$OB = a + l$$
$$OA = a$$
$$AB^2 = (a+l)^2 - a^2 = l^2 + 2al$$
$$AB = \sqrt{l^2+2al}$$

முறை 1

தளத்திற்குச் செங்குத்தாக விசைகளைக் கூறாக்க.

$$T\cos\theta - W\cos(90-\alpha) = 0$$
$$T = \frac{W\sin\alpha}{\cos\theta}$$
$$= W\sin\alpha.\frac{(a+l)}{\sqrt{l^2+2al}} = \frac{W(a+l)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{OB}$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{l^2+2al}}{a+l}$$

$$\sec^2\theta = \frac{9+\tan^2\alpha}{9}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$

$$R = \frac{W\cos\theta}{3\cos\alpha}$$
$$R = \frac{W}{3\cos\alpha}\cdot\frac{3}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$
$$R = \frac{W}{\sqrt{9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} = \frac{W}{\sqrt{8\cos^2\alpha+1}}$$

கோலின் வழியே விசைகளைத் துணிக்க,

$$S.\cos(90-\alpha) - R.\cos(90-\alpha) - W.\cos(90-\theta) = 0$$
$$S.\sin\alpha - R.\sin\alpha - W\sin\theta = 0$$
$$S.\sin\alpha = R\sin\alpha + W\sin\theta$$

$$= \frac{W}{\cos\alpha}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}} + W\frac{\tan\alpha}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$
$$= \frac{2W\tan\alpha}{\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$

$$S = \frac{2W}{\cos\alpha\sqrt{9+\tan^2\alpha}}$$
$$= \frac{2W}{\sqrt{8\cos^2\alpha+1}}$$

உதாரணம் 6:

அரையுச்சிக்கோணம் 30° உம் W நிறையுமுடைய சீரான செவ்வட்டக் கம்பொன்று கிடையுடன் α சாய்வுடைய சாய்தளம் ஒன்றில் அதன் வளைபரப்புத் தொட்டுக் கொண்டிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்பின் வட்ட அடியில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்ட $\sqrt{3}a$ நீளமுடைய இலேசான நீளா இழையொன்றின் மறுமுனை சாய்தளத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சாய்முகமானது,

i. இழையின் இழுவை $\dfrac{2\sqrt{3}W\sin\alpha}{3}$ எனக் காட்டுக.

ii. கூம்பின் வளைபரப்புக்கும் சாய்தளத்திற்கும் இடையிலான மறுதாக்கத்தினைக் காண்க.

iii. மறுதாக்கத்தின் தாக்கக்கோடானது, கூம்பின் சமச்சீரச்சினை அதன் உச்சியிலிருந்து $\dfrac{3a}{4}\left[\dfrac{3\sqrt{3}\cos\alpha+5\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}\right]$ தூரத்தில் வெட்டுமெனக் காட்டுக.

(h உயரமுடைய சீரான திண்ம செவ்வட்டக் கூம்பொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் உச்சியிலிருந்து $\dfrac{3h}{4}$ எனும் தூரத்தில் இருக்கும்.)

4.6 மூன்று விசைகளிலும் கூடிய விசைகளின் கீழ் சமநிலை

மூன்றிலும் கூடிய விசைகளின் தாக்கத்தின்கீழ் இப்போது நாங்கள் மூன்றிலும் கூடிய விசைகள் தாக்கும் பொதுவான நிலைமையினைக் கருதுவோம். இப்போது விசைகள் எல்லாம் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும் என்பதில்லை.

ஒரு விறைப்பான உடலொன்றில் தாக்கும் ஒருதளவிசைகள் எல்லாம் ஓர் தனிவிசை R இற்கோ அல்லது ஓர் இணை G யிற்கோ ஒடுக்கப்படலாம்.

$R = 0$ ஆயின் யாதும் திசையிலான அதன் கூறுகள் பூச்சியமாகும்.

ஆனால் $R^2 = X^2 + Y^2$ ஆகும். இதிலிருந்து $R = 0$ ஆயின் $X = 0, Y = 0$ ஆகும்.

அதாவது யாதுமிருஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் விசைகளின் கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி பற்றிய திருப்பங்கள் சமனானவையாகும். G பூச்சியமானதாயின் யாதுமொரு புள்ளி பற்றிய திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் எனக் குறிப்பிடுதல் வேண்டும்.

i. யாதுமிரு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளின் விசைகளின் கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

ii. தளத்திலுள்ள யாதுமொரு புள்ளி பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

   நிபந்தனை ii) ஆனது தொகுதி தனிவிசையொன்றுக்கு ஒடுங்கவில்லை என்பதை உறுதிப்படுத்துகின்றது.

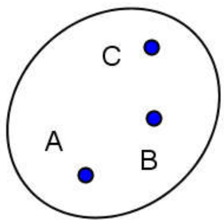
   நிபந்தனை iii) ஆனது தொகுதி இணையொன்றுக்கு ஒடுங்கவில்லை என்பதை உறுதிப்படுத்துகின்றது.

இன்னொரு சமவலு நிபந்தனை

இத்தளத்தில் ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாத யாதும் மூன்று புள்ளிகள் பற்றிய விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணித கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

நிறுவல்

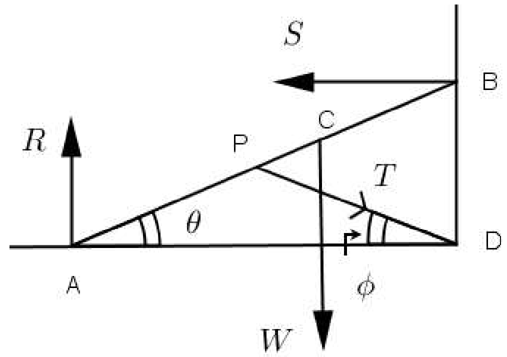
A, B பற்றிய விசைகளின் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என்பது, இவ்விசைகளின் விளையுள் AB வழியே இருக்கவும் கூடும். C பற்றியும் திருப்பம் பூச்சியம் பெறும்போது இத்தகைய ஒரு விசை இல்லை என்பதனைத் தரும்.



உதாரணம் 2

W நிறையுடைய வளையொன்றின் புவியீர்ப்பு மையமானது அதனை a, b நீளங்களாகப் பிரிக்குமாறு AC, BC உள்ளது. வளையானது ஒப்பமான தரையில் அதன் ஒரு முனையும் மறுமுனையானது ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிராயும் கிடக்க, D எனும் புள்ளியில் வளையில் உள்ள வளையத்துடன் இணைக்கப்பட்டு அதன் மறுமுனையானது சுவர், தரை மூலைப்புள்ளியுடன் இணைக்கப்பட்ட இலேசான நீளா இழையினால் வளை சமநிலையில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. சமநிலையில் வளை, இழை என்பவற்றின் சாய்வுகள் கிடையுடன் முறையே θ ஆகும் எனக் காட்டுக.

$$T = \frac{Wa\cos\theta}{(a+b)\sin(\theta-\phi)}$$



AB இன் சமநிலைக்கு

$$\rightarrow T\cos\phi - S = 0$$
$$S = T\cos\phi$$

$\uparrow$ A பற்றித் திருப்பம் எடுக்க,

$$S\times AB\sin\theta - T\times AD\sin\phi - W\times a\cos\theta = 0$$
$$T\cos\phi(a+b)\sin\theta - T\times(a+b)\cos\theta\sin\phi = Wa\cos\theta$$
$$T(a+b)[\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi] = Wa\cos\theta$$

$$T(a+b)\sin(\theta-\phi) = W\times a\cos\theta$$
$$T = \frac{Wa\cos\theta}{(a+b)\sin(\theta-\phi)}$$

உதாரணம் 3

W நிறையுடைய சீர்க்கோல் AB இன் முனையொன்றுக்கு ஓர் w நிறை இணைக்கப் பட்டுள்ளது. கோலின் முனைகள் OA, OB எனும் இரு சம நீளமுடைய இழைகளால் O எனும் நிலைத்த புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் இழையின் பகுதிகளில் OA, OB இல் உள்ள இழுவைகள் முறையே T_1, T_2 ஆயின்

(i) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{W}{W+2w}$ எனக் காட்டுக.

(ii) OA ஆனது நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணம் α எனின்

$$\tan\alpha = \frac{(W+2w)\sqrt{3}}{3W+2w}$$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{W+2w}{2(W+w)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\alpha+\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}\cot\alpha+1}$$

$$\frac{\sqrt{3}\cot\alpha+1}{2}=\frac{2(W+w)}{W+2w}$$

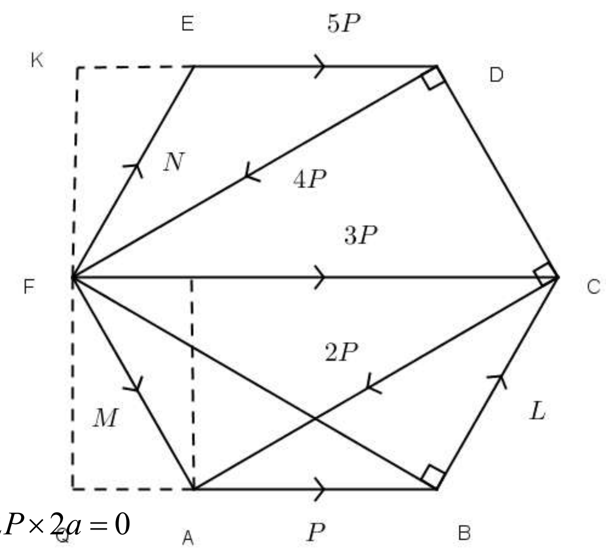
$$\sqrt{3}\cot\alpha=\frac{4W+4w}{W+2w}-1=\frac{3W+2w}{W+2w}$$

$$\cot\alpha=\left(\frac{3W+2w}{W+2w}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\alpha=\left(\frac{W+2w}{3W+2w}\right)\sqrt{3}$$

உதாரணம் 4

2a பக்க நீளமுடைய அறுகோணியொன்றின் மணிக்கூட்டுத் திசைக்கு எதிர்திசையில் எடுக்கப்பட்ட உச்சிகள் A, B, C, D, E, F ஆகும். P, 2P, 3P, 4P, L, M, N N பருமனுடைய விசைகள் முறையே AB, CA, FC, DF, ED, BC, FA, FE வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. தொகுதியானது சமநிலையிலிருப்பின் L, M, N இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.



விசைகளின் கீழ் சமநிலை எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

ஆகவே, யாதுமொரு புள்ளி பற்றி விசைகளில் திருப்பங்களின் அட்சரகணிதக் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் ஆகும்.

$$FB\perp BC$$
$$FD\perp DC$$

A பற்றி திருப்பம் எடுக்க.

$$ɱ\ L\times FB-5P\times FK+P\times FQ-2P\times FA=0$$

$$L\times 4a\cos 30-5P\times 2a\sin 60+P\times 2a\sin 60-2P\times 2a=0$$

$$4L\times\frac{\sqrt{3}}{2}-10P\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2P\times\frac{\sqrt{3}}{2}-4Pa=0$$

$$2\sqrt{3}L-4\sqrt{3}P-4P=0$$

$$L=\frac{4P+4\sqrt{3}P}{2\sqrt{3}}$$

$$=2P\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)N$$

4.7 பயிற்சி

(1) 2W நிறையும் l நீளமும் உடைய இணையொன்றானது அதன் மேல்முனை A யிற்கு இணைக்கப்பட்ட பிணையல் ஒன்று பற்றித் திரும்பச் சுயாதீனமுடையது. B யில் பிரயோகிக்கப்படும் ஓர் கிடைவிசையினால் A யினூடான நிலைக்குத்திலிருந்து a கிடைத்தூரத்தில் B இருக்குமாறு கோல் ஓய்வடைகின்றது. சமநிலையில் பிணையல் A யில் மறுதாக்கம் $w\left[\dfrac{4l^2-3a^2}{l^2-a^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக.

(2) a நீளமுடைய சீரானகோல் ஒன்றானது அதன் ஒருமுனை ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற்கெதிராயும் அதன் மறுமுனைக்கு இணைக்கப்பட்டு சுவரிலுள்ள புள்ளியொன்றுக்கு இணைக்கப்பட்ட இலேசான நீளா இழையினால் கோல் சமநிலையில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. சுவருடன் கோலின் சாய்வு θ ஆயின்,
$\cos^2\theta = \dfrac{l^2-a^2}{3a^2}$ ஆல் தரப்படுமெனக் காட்டுக.
சமநிலை சாத்தியமாகுமாறு $a : l$ இற்கான எல்லையினைக் காண்க.

(3) W நிறையும் r ஆரையுமுடைய கோளமொன்றானது ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிராக உள்ளது. கோளமேற்பரப்பிலுள்ள புள்ளியொன்றுக்கு இணைக்கப்பட்டு நிலைக்குத்தான சுவரிலுள்ள புள்ளியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்ட l நீளமுடைய இலேசான நீளா இழையினால் தொகுதி சமநிலையில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. இழையின் இழுவை

$\dfrac{W(l+r)}{\sqrt{l^2+2lr}}$ எனக் காட்டுக. கோளத்திற்கும் சுவரிற்கும் இடையிலான மறுதாக்கத் தினைக் காண்க.

(4) h உயரம் அரையுச்சிக் கோணம் a உம் உடைய ஓர் செவ்வட்டத் திண்மக் கூம்பொன்றானது, அதன் அடியானது ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரிற்கெதிராக இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு, கூம்பின் உச்சிக்கு இணைக்கப்பட்டு சுவரிலுள்ள புள்ளியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்ட இலேசான நீளா இழையினால் தொகுதி சமநிலையில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது.
இழையின் அதிகூடிய நீளம் $h\sqrt{1+\dfrac{16}{9}\tan^2\alpha}$

(5) முக்கோண வடிவ விறைப்பான அடர் ஒன்றானது O விலிருந்து A, B ஊடாகச் செல்லும் இழைகளின் மூலம் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் BC நிலைக்குத்தாகவும் AO, BO என்பன நிலைக்குத்துடன் முறையே α, β கோணங்களை ஆக்குவதாகவும் இருப்பின் $2\cot\alpha - \cot\beta = 3\cot\beta$ எனக் காட்டுக.

(11) W நிறையுடைய ஓர் சீரான வளையொன்றானது கிடைத்தளம் ஒன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. மறுமுனைக்கு இணைக்கப்பட்ட இலேசான நீளா இழையானது கிடையுடன் a சாய்வுடைய சாய்தளம் ஒன்றின் உச்சியில் போடப்பட்டுள்ள இலேசான கப்பியொன்றின் மேலாகச் சென்று அதன் மறுமுனையில் ஓர் நிறை P இனைக் காவுகின்றது. சமநிலையில் $2P = W\sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

(12) W நிறையுடைய சீரான கோலான்றானது அதன் ஓர் முனையில் பிணைக்கப்பட்ட ஒப்பமான பிணையல் பற்றி நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுழல்வதற்கு சுயாதீனமுடையது. கோலின் மறுமுனையில் கோலின் நிறையின் அரைப்பங்கு நிறையொன்று இணைக்கப்பட்டு, இம்முனையானது l நீளமுடைய இழையொன்றில் ஒரு முனைக்கு இணைக்கப்பட்டு இழையின் மறுமுனையானது பிணையலுக்கு நேர் மேலெ C தூரத்தில் உள்ள புள்ளியொன்றிற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் இழுவை $\dfrac{lW}{c}$ எனக் காட்டுக.

(13) ABCDEF ஆனது ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றாகும். P பருமனுடைய ஐந்து விசைகள் முறையே AE, ED, DC, CB, BA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. ஒவ்வொன்றும் Q பருமனுடைய விசைகள் முறையே AC, CE, EB, BD, DA வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் தாக்குகின்றன. P, Q என்பது குறித்த ஒரு விகிதத்தில் உள்ளபோது இப்பத்து விசைகளின் தாக்கத்தின் கீழ் தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும் எனக் காட்டி இவ்விகிதத்தினைக் காண்க.